UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Partiel - mardi 23 octobre 2007.

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Les exercices sont indépendants.

1. Question de cours : énoncer et prouver la proposition sur la mesure d'une réunion croissante (prop. 2.2.8).
2. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
   (a) Calculer $\mu([0,1])$ dans le cas $f(x) = x^2 e^{-x} \mathbf{1}_{[0,2]}$.
   (b) Calculer $\int_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \frac{1}{x} \mu(dx)$ dans le cas $f(x) = \frac{1}{1-x} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
   (c) Calculer $\mu([0,2])$ dans le cas $f(x) = \inf\left(x^2, \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
3. Calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 n^2(1-e^{-x/n})^2 dx$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-2n} dx$.
4. On pose pour tout $u \in]0,1[$, $F(u) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{x\log(u)}}{x} dx$.
   (a) Trouver F'.
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} F(1/n)$.