

TD 4

1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On cherche

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \arg \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} F(a,b), \text{ avec } F(a,b) := \sum_{t=1}^n (x_t - a - bt)^2.$$

- (a) Trouver les points critiques de F .

Formules à savoir par cœur :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- (b) Montrer que l'unique point critique est un minimum absolu de F .
2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Soit $T \in \mathbb{R}$. Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \Delta P(X) = P(X) - P(X - T)$.
- (a) Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$.
- (b) On suppose que $\Delta^{k-1}P \neq 0$. Montrer que $\deg(P) \geq k$.
3. Les processus (X_k) suivants sont stationnaires (au sens de la définition no 2). Le processus $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ est un bruit blanc de variance σ^2 et de moyenne nulle.
- (a) Quelle est la fonction d'auto-covariance du processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{1}{2}X_{n-1} = \epsilon_n ?$$

- (b) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{5}{6}X_{n-1} + \frac{1}{6}X_{n-2} = \epsilon_n.$$

Donner les valeurs de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2$ et en déduire l'expression de $\sigma(h)$ pour $h \geq 1$.

- (c) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - X_{n-1} + \frac{1}{2}X_{n-2} = \epsilon_n.$$

Donner les expressions de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - z - \frac{1}{2}z^2$ et en déduire que

$$\rho(h) = 2^{-h/2} \left(\cos\left(\frac{h\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{h\pi}{4}\right) \right), \quad \forall h \geq 0.$$

4. Soit le processus AR_1 (centré) suivant

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ_t est un bruit blanc centré de variance σ^2 .

- (a) Quelle condition doit-on imposer sur a pour que ce processus soit stationnaire?
- (b) Calculer la variance de ce processus.
- (c) Montrer que l'auto-covariance d'un tel processus est

$$\sigma(h) = \sigma^2 \frac{a^h}{1 - a^2}.$$

- (d) En déduire la décroissance vers 0 de l'auto-covariance lorsque $h \rightarrow +\infty$.
 - (e) Calculer l'auto-corrélation partielle.
5. Soit le processus $ARMA_{1,1}$ défini par $X_t + aX_{t-1} = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1}$ (avec (ϵ_t) bruit blanc centré de variance σ^2). Est-ce un processus stationnaire? Existe-t-il une écriture plus simple de ce processus?
6. Considérons le processus $X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$ (avec (ϵ_t) bruit blanc centré de variance σ^2).
- (a) Montrer que $\sigma(0) = \sigma^1 \times \frac{1+b^2+2ab}{1-a^2}$, $\sigma(1) = \sigma^2 \times \frac{a+b+ab^2+a^2b}{1-a^2}$.
 - (b) En déduire $\rho(1) = \frac{(a+b)(1+ab)}{b^2+2ab+1}$, $\rho(h) = a^{h-1}\rho(1)$.