

TP/TD 6

1 Programmation

Préliminaires

Créer un fichier texte dans lequel vous répondrez clairement aux questions ci-dessous, en incluant vos codes R, les résultats obtenus sous R (graphique y compris), vos interprétations, remarques ... Une fois ce TP fini, vous mettrez en forme votre compte-rendu et l'exporterez au format pdf.

1.1 Données simulées

1. Soient les fonctions (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) $x_1(t) = 2 \cos(2\pi \times 6t)$, $x_2(t) = 2 \cos(2\pi \times 10t)$, $x_3(t) = 2 \cos(2\pi \times 40t)$, $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$. Tracer les graphes de x_1 , x_2 , x_3 , x pour t dans $[0; 2\pi]$. On range les ordonnées du tracé de x dans une série temporelle \mathbf{x} .
2. Tracer le périodogramme de \mathbf{x} .
3. Tracer une estimée de la densité spectrale de \mathbf{x} . Bien noter la différence d'échelle en abscisse entre le tracé de la densité spectrale et celui du périodogramme.
4. Au vu des graphiques, quelles sont les composantes périodiques de \mathbf{x} (attention à ne pas se laisser tromper par l'échelle en abscisse)?
5. Tracer une série \mathbf{y} de type AR_3 avec $a_1 = 0$, $a_2 = -0,5$, $a_3 = 0.2$.
6. Tracer une estimée de la densité spectrale de \mathbf{y} .
7. Au vu du graphique, quelles sont les composantes périodiques de \mathbf{y} (attention à ne pas se laisser tromper par l'échelle en abscisse)?

1.2 Données réelles

1. La série temporelle `sunspot.year` (contenue dans `R`) contient le nombre moyen de taches solaires observées par mois (on fait à chaque fois la moyenne sur une année). Tracer la densité spectrale de cette série.
2. Au vu du graphique, quelles sont les composantes périodiques de `sunspot.year` (attention à ne pas se laisser tromper par l'échelle en abscisse)?
3. Récupérer le fichier `soi.clean.dat`¹. Il contient les différences de pression mensuelles entre Tahiti et Darwin dans lesquelles les oscillations annuelles ont déjà été gommées. Cette série est un indicateur des événements « El Niño ». Tracer la densité spectrale de cette série (que l'on appellera \mathbf{x}).
4. Au vu du graphique, quelles sont les composantes périodiques de \mathbf{x} (attention à ne pas se laisser tromper par l'échelle en abscisse)?

1. <http://www.http://math.unice.fr/~rubentha/enseignement/soi.clean.dat>

Appendice : mise en œuvre sous R

Pour tracer une fonction : remplir un vecteur avec les abscisses des points que l'on veut tracer (exemple : $t=(1:100)/(2*\pi)$), remplir un vecteur avec les ordonnées des points que l'on veut tracer (exemple : $x=\cos(t)$), puis utiliser la commande `plot.ts` (exemple : `plot.ts(x,ylim=c(-2,2),main=expression(exemple))`), l'option `ylim` permet de fixer les bords du cadre en ordonnée, l'option `main(...)` permet d'écrire un titre).

Pour tracer le périodogramme d'une série x de n points : $P=\text{abs}(\text{fft}(x)/n)^2$;
 $Fr=(0:(n-1))*2*\pi/n$; , `plot(Fr,P,type='o',xlab='fréquence',ylab='périodogramme')` (les options `xlab`, `ylab` permettent d'écrire des légendes sur les axes).

Pour tracer une estimée de la densité spectrale d'une série x : choisir des poids $W_n(\cdot)$ comme dans le cours (rentrer l'instruction `k=kernel("daniell",4)`), puis tracer la densité spectrale avec l'instruction `spec.pgram(x,k,taper=0,log='no')`.

2 Exercices

- Soit (X_t) un processus AR_3 : $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ avec $\phi = 0,99$, (Z_t) un bruit blanc centré de variance 1. Calculer les covariances de (X_t) .
 - Calculer la densité spectrale de (X_t) .
 - Soit $Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$. Calculer les covariances de (Y_t) .
 - Calculer la densité spectrale de (Y_t) .
- Soient (X_t) , (Y_t) des processus stationnaires centrés indépendants de densités spectrales respectivement f_X , f_Y . Soit $Z_t = X_t + Y_t$. Calculer la densité spectrale de Z en fonction de f_X , f_Y .
- Soit (W_t) un bruit blanc de variance 1 (centré). Soit $X_t = W_t - \theta W_{t-1}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)
 - Est-ce que (X_t) est stationnaire? Calculer les covariances de (X_t) .
 - Calculer la densité spectrale de (X_t) .