M1 IM - Séries temporelles

Corrigé de l'examen (durée : 3h)

Documents (autres que les feuilles de TD) et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j (x_{n-j} - x)^2$. Nous avons $f'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} -2\alpha^j (x_{n-j} - x)$. L'unique valeur annulant f' est

$$x_c = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j x_{n-j}}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j}.$$

Pour tout x, $f''(x) = \sum_{j=0}^{n-1} 2\alpha^j \geq 0$ donc f est convexe donc x_c est le minimum absolu de f. Donc

$$\widehat{x}_{n,h} = \frac{(1-\alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j x_{n-j}}{1 - \alpha^n}.$$

Exercice 2. Nous avons, pour tout t,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 + X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i^2 + X_t^2 \\ X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i^2 + W_t . \end{aligned}$$

Exercice 3.

(1) Le polynôme caractéristiques est $P(Z) = 1 - \frac{7}{6}Z + \frac{1}{3}Z^2$. Nous avons

$$\begin{aligned} P(Z) &= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{7}{2}Z + Z^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(Z - \frac{3}{2}\right)(Z-2) . \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont donc $\left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$. Elles sont de modules > 1. Donc (par théorème), il existe un processus stationnaire vérifiant la relation de l'énoncé. Nous noterons ce processus (X_n) dans la suite.

(2) Le processus (X_n) est un $AR(2)$. Notons σ sa fonction d'auto-covariance. Nous avons (pour tout n)

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \mathbb{E}(X_n X_n) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{7}{6}X_{n-1} - \frac{1}{3}X_{n-2} + \epsilon_n\right)^2\right) \\ &= \frac{49}{36}\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{9}\mathbb{E}(X_{n-2}^2) + \mathbb{E}(\epsilon_n^2) - 2 \times \frac{7}{18}\mathbb{E}(X_{n-1}X_{n-2}) + 0 \\ &= \frac{49}{36}\sigma(0) + \frac{1}{9}\sigma(0) + 1 - \frac{7}{9}\sigma(1) , \end{aligned}$$

d'où :

$$17\sigma(0) - 28\sigma(1) = -36 . \tag{0.1}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \mathbb{E}(X_n X_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{7}{6}X_{n-1} - \frac{1}{3}X_{n-2} + \epsilon_n\right) X_{n-1}\right) \\ &= \frac{7}{6}\sigma(0) - \frac{1}{3}\sigma(1) , \end{aligned}$$

d'où :

$$8\sigma(1) - 7\sigma(0) = 0\,. \tag{0.2}$$

On résoud maintenant le système formé par (0.1) et (0.2). En remplaçant $\sigma(1)$ par $(7/8)\sigma(0)$ dans (0.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} 17\sigma(0) - \frac{49}{2} \quad \sigma(0) &= \quad -36 \\ \sigma(0) \quad &= \quad \frac{72}{15} = \frac{24}{5}\,. \end{aligned}$$

Puis

$$\sigma(1) = \frac{7}{8}\sigma(0) = \frac{63}{15} = \frac{21}{5}\,.$$

(3) Nous avons la relation

$$\forall h \geq 2\,,\ \sigma(h) = \frac{7}{6}\sigma(h-1) - \frac{1}{3}\sigma(h-2)\,.$$

Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^2 - \frac{7}{6}X + \frac{1}{3} \\ &= \left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Il a deux racines distinctes (2/3 et 1/2). On cherche donc la solution sous la forme $\sigma(h) = \lambda(2/3)^h + \mu(1/2)^h$. Nous connaissons $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$, ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = \sigma(0) \\ \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{2}\mu & = \sigma(1)\,. \end{cases}$$

D'où

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\sigma(0) - \sigma(1)\right)\left(-\frac{6}{1}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{6}{1}\right) = \frac{54}{5}\,,$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sigma(0) - \sigma(1) &= \mu\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{15}(48 - 63) \times 6 &= \mu \\ -6 &= \mu\,. \end{aligned}$$

Exercice 4.

(1) Pour tout t :

$$\mathbb{E}(X_t) = 0\,,$$

$$\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(W_t^2) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(W_{t-1}^2) + 0 = \frac{5}{4}\,.$$

(2) Pour tout t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t-1}) &= \mathbb{E}\left(\left(W_t - \frac{1}{2}W_{t-1}\right)\left(W_{t-1} - \frac{1}{2}W_{t-2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

et si $h \geq 2$,

$$\mathbb{E}(X_t X_{t-h}) = 0.$$

Donc la fonction d'auto-covariance est

$$\sigma\ :\ h \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} \frac{5}{4} & \text{si } h = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 5.

(1) `y=diff.ts(x,lag=1,difference=1)`

(2) Supposons que la série $\Delta^2 x$ soit rangée dans la variable `z`. Les commandes demandées sont : `acf(z,lag.max=20,type=c('correlation'))` (pour les auto-corrélations) et `pacf(z,lag.max=20,type=c('correlation'))` (pour les auto-corrélations partielles).

(3) Le processus ressemble plus à un $AR(2)$ (les auto-corrélations tendent vers 0 et les auto-corrélations partielles sont à 0 à partir du rang 3).

(4) Donc le processus x est un processus $ARIMA(2,2,0)$.

(5) `out<-arima(serie,order=c(2,2,0))`