

FEUILLE 1

LOI DES GRANDS NOMBRES ET THÉORÈME CENTRAL-LIMITE

Exercice 1. Donner au moins deux méthodes différentes d'approximation de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^1 \cos(x^3) \exp(-x) dx,$$

à l'aide d'une moyenne empirique impliquant des variables aléatoires de loi connue.

Même question avec

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(x^4) \exp(-2x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

et

$$I_3 = \int_0^1 \ln(1+x^2) \exp(-x^2) dx.$$

Exercice 2. Soit $(U_n^1, \dots, U_n^3)_{n \geq 1}$ une famille de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $]0, 1[$. Donner la limite presque-sûre de

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i^1)^2 + (U_i^2)^2 + (U_i^3)^2 < 1}.$$

Donner une méthode similaire pour retrouver le volume d'une boule de rayon 2.

Exercice 3. Etant donnée une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ identiquement distribuées et indépendantes, telles que $\mathbb{E}[|X_1|^4] < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

(1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq C[n + n^2].$$

(2) En utilisant l'inégalité de Markov à l'ordre 4, en déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\{|S_n| \geq n^{5/6}\} \leq cn^{-4/3}.$$

(3) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que, presque-sûrement, $S_n/n \rightarrow 0$.

Exercice 4. Etant donnée une fonction f sur le segment $[0, 1]$, on définit, pour tout rang $n \geq 1$, la fonction polynomiale

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n [C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)].$$

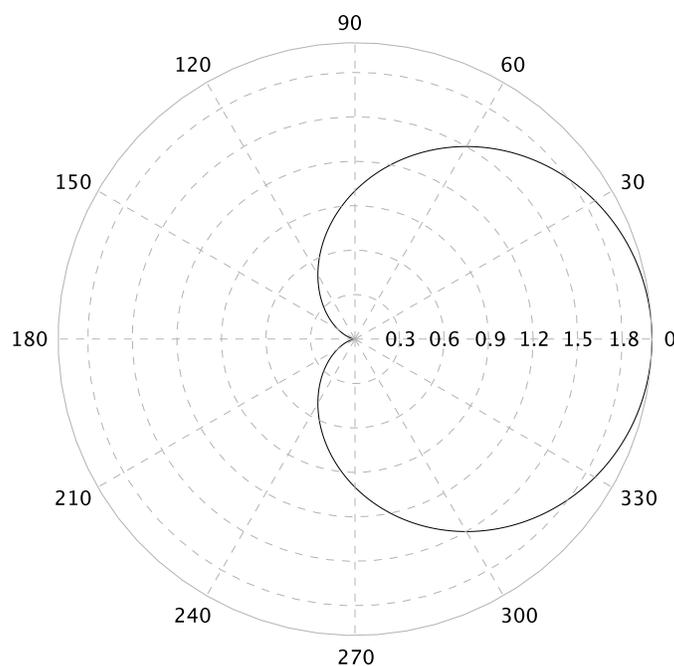
(1) En introduisant, pour tout $x \in [0, 1]$, $(\varepsilon_n(x))_{n \geq 1}$, suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x , et en posant $S_n(x) = \varepsilon_1(x) + \dots + \varepsilon_n(x)$, interpréter $\mathcal{P}_n(x)$ comme une espérance.

(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(3) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \mathcal{P}_n(x)| = 0.$$



Exercice 5. La figure ci-dessus représente une cardioïde (section de pomme) d'équation $(x^2 + y^2 - x)^2 = (x^2 + y^2)$.

- (1) L'intérieur de la cardioïde est donnée par l'inéquation $(x^2 + y^2 - x)^2 < (x^2 + y^2)$.
En déduire une méthode probabiliste d'approximation de la surface intérieure de la cardioïde.
- (2) En déduire une méthode probabiliste d'approximation du volume d'une pomme. (Penser à utiliser les volumes de révolution.)
- (3) En fait, la cardioïde admet aussi une description paramétrique en coordonnées polaires: $\rho = 1 + \cos(\theta)$. En déduire que le volume d'une pomme est $8\pi/3$.

Exercice 6. (*Plus difficile.*) Soient X_1, \dots, X_n des v.a. i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre 1, de somme notée S_n .

- (1) En utilisant le TCL, calculer la limite quand n tend vers l'infini de

$$\mathbb{P}\{a \leq \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right) \leq b\},$$

pour a et b deux réels.

- (2) On rappelle que S_n suit une loi $\Gamma(n, 1)$, i.e. a pour densité la fonction

$$x \mapsto \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x) \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \exp(-x),$$

calculer directement la même quantité que ci-dessus.

- (3) Retrouver la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(On rappelle que $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Exercice 7.

Soient X_1, X_2, \dots des variables i.i.d uniformes dans $C = [-1; 1] \times [-1; 1]$. Soit D le disque (dans \mathbb{R}^2) de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

- (1) Calculer par une méthode de Monte-Carlo la valeur de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \in D})$.
- (2) Estimer la variance de la méthode.
- (3) Trouver n un nombre de boucles à effectuer en (1) pour que l'estimation de l'espérance soit précise à 0,1 près avec une probabilité $\geq 0,95$.

Exercice 8. (1) Simuler des variables exponentielles par la méthode du cours (livre : p. 8).

- (2) Tracer un histogramme des variables simulées par cette méthode. Comparer avec un tracé de la densité de la loi exponentielle. (Exemples de programmes dont on pourra s'inspirer : M1 IMEA <http://math.unice.fr/rubentha/cours.html>.)

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov dans \mathbb{R} de loi initiale μ (de densité que l'on notera μ , par rapport à la mesure de Lebesgue) et de noyau de transition M ($M(x, dy)$ a une densité $M(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Soient $P \geq 1$, $G_1, \dots, G_P : \mathbb{R} \rightarrow]0; 1]$. Soit $\pi_{1:P}$ la loi sur \mathbb{R}^{P+1} donnée par son action sur les fonctions tests :

$$\pi_{1:P}(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_0, \dots, X_P) \prod_{i=1}^P G_i(X_i))}{\mathbb{E}(\prod_{i=1}^P G_i(X_i))}.$$

- (1) Montrer que la densité de $\pi_{1:P}$ en un point (x_0, \dots, x_P) est proportionnelle à

$$g(x_0, \dots, x_P) := \mu(x_0) \prod_{i=0}^{P-1} M(x_i, x_{i+1}) G_{i+1}(x_{i+1})$$

(on notera cette densité également $\pi_{1:P}$).

- (2) Montrer que $\forall (x_0, \dots, x_P), \pi_{1:P}(x_0, \dots, x_P) \leq \frac{g(x_0, \dots, x_P)}{Z}$ avec $Z = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^P G_i(X_i))$.
- (3) Écrire un algorithme de simulation suivant la loi $\pi_{1:P}$ en utilisant une méthode de rejet. Justifier cet algorithme.