UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 1 IM - Méthodes de Monte-Carlo
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 5

Modèle d'Ising avec condition au bord

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Lambda = \{-N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$. Soit E l'ensemble des fonctions $x : \Lambda \to \{-1, +1\}$ telles que, pour tout $m_1 \in \{-N, -N+1, \dots, N\}$, $x(-N, m_1) = -1$, $x(m_1, -N) = -1$, $x(N, m_1) = 1$ si $m_1 > -N$, $x(m_1, N) = 1$ si $m_1 > -N$. Soit, pour $x \in E$,

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, m' \in \Lambda \\ |m-m'|=1}} |x(m) - x(m')|^2 .$$

On s'intéresse à

$$\pi(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(x)} ,$$

avec $Z(\beta) = \sum_{x \in E} e^{-\beta H(x)}$.

(1) Écrire une procédure qui permet de simuler une simulation suivant le noyau Q du cours (celui où on modifie les points de Λ^+ ou Λ^-).

(2) Écrire une procédure qui permet de calculer $\pi(x)$ pour toute configuration x.

(3) Écrire un programme qui simule la loi invariante ci-dessus (de manière approchée, par l'algorithe de Metropolis).

(4) Trouver des valeurs de β tels que le graphique ressemble aux exemples disponibles sur la page internet du cours (archives 2012-2013, graphiques correspondant au TD 6). (On commencera avec $\beta = 0, 1$.)

Instructions utiles en R

Remplir une matrice de uns : `a<-matrix(rep(1,k*k),k,k)` (taille $k \times k$). Coefficient (i, j) de la matrice : `a[i,j]`. Division euclidienne : `4%%2` (renvoie 0), `5%%2` (renvoie 1). Ouvrir une fenêtre graphique de dimension fixée : `plot(c(1, 2*N+2), c(1,2*N+2), type = "n", xlab="", ylab="")`. Dessiner un rectangle : `rect(xleft,ybottom,xright,ytop,color="red")`