M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

# Corrigé du partiel 2 (durée : 1h30), sujet A

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.**

(1) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = [\sqrt{x}]_0^1 = 1$

(2) Pour $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, $F(x) = 1$. Pour $x \in [0;1]$, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{x}$.

(3) Pour $u \in [0;1]$, $F^{-1}(u) = u^2$.

(4) Si $U$ est de loi $\mathcal{U}([0;1])$ alors $F^{-1}(U)$ est de loi de densité $f$ (résultat du cours).

**Algorithme 1** Programme

```
u=runif(1,0,1)
x=u^2
print(x)
```

**Exercice 2.**

(1) (a) On peut approcher $p_l = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X))$ par $\frac{1}{n}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X_1) + \dots + \mathbb{1}_{[l;l+1]}(X_n))$ avec $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que $X$ et $n \to +\infty$ (par la loi des grands nombres : $\frac{1}{n}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X_1) + \dots + \mathbb{1}_{[l;l+1]}(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} p_l$).

(b) La variance de la méthode est $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X)^2) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X))^2 = p_l - p_l^2 = p_l(1-p_l)$.

(2) (a) On écrit

$$p_l = \int_l^{l+1} \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)e^{-x}dx = \int_l^{l+1} \frac{\mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)e^{-x}}{\mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)} \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)dx\,.$$

Soit $\widetilde{f}(x) = \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)$. Cette fonction $\widetilde{f}$ est la densité de probabilité de la loi $\mathcal{U}([l;l+1])$. Nous avons donc $p_l = \mathbb{E}(e^{-Y})$ avec $Y \sim \mathcal{U}([l;l+1])$.
Nous pouvons donc approcher $p_l$ par $\frac{1}{n}(e^{-Y_1} + \dots + e^{-Y_n})$ avec $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de même loi que $Y$ et $n \to +\infty$ (par la loi des grands nombres, $\frac{1}{n}(e^{-Y_1} + \dots + e^{-Y_n}) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(e^{-Y}) = p_l$).

(b) La variance de cette méthode est

$$\mathbb{E}(e^{-2Y}) - \mathbb{E}(e^{-Y})^2 \quad = \quad \int_l^{l+1} e^{-2y}dy - p_l^2 = \frac{e^{-2l} - e^{-2(l+1)}}{2} - p_l^2\,.$$

(3) Nous avons $p_l = \int_l^{l+1} e^{-x}dx = e^{-l} - e^{-(l+1)}$. Et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{V}(e^{-Y})}{\mathbb{V}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X))} &= \frac{\left(\frac{e^{-2l}-e^{-2(l+1)}}{2} - (e^{-l} - e^{-(l+1)})^2\right)}{(e^{-l} - e^{-(l+1)})(1 - (e^{-l} - e^{-(l+1)}))} \\
&= e^{-l} \times \frac{\left(\frac{1-e^{-2}}{2} - 1 - e^{-2} + 2e^{-1}\right)}{(1-e^{-1})(1 - e^{-l}(1-e^{-1}))} \\
&\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Donc la deuxième méthode proposée réduit bien la variance (asymptotiquement en $l \to +\infty$).