M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du partiel 2 (durée : 1h30), sujet B

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) $\int_0^1 \frac{3}{2}\frac{1}{x^{1/3}}dx = \left[x^{2/3}\right]_0^1 = 1$

(2) Pour $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, $F(x) = 1$. Pour $x \in [0;1]$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2t^{1/3}}dt = [t^{2/3}]_0^x = x^{2/3}\,.$$

(3) Pour $u \in [0;1]$, $F^{-1}(u) = u^{3/2}$.

(4) Si U est de loi $\mathcal{U}([0;1])$ alors $F^{-1}(U)$ est de loi de densité f (résultat du cours).

Algorithme 1 Programme

```
u=runif(1,0,1)
x=u^(3/2)
print(x)
```

Exercice 2.

(1) (a) On peut approcher $p_l = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X))$ par $\frac{1}{n}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X_1)+\dots+\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X_n))$ avec $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que X et $n \to +\infty$ (par la loi des grands nombres : $\frac{1}{n}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X_1) + \dots + \mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} p_l$).

(b) La variance de la méthode est $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X)^2) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X))^2 = p_l - p_l^2 = p_l(1-p_l)$.

(2) (a) On écrit

$$\begin{aligned} p_l &= \int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)(2/3)x^{-1/3}}{\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)}\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)(2/3)x^{-1/3}}{\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)l(l+1)} l(l+1)\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)dx\,. \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{f}(x) = l(l+1)\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(x)$ (la densité de la loi uniforme sur $[1/(l+1);1/l]$). Nous avons donc $p_l = \mathbb{E}((2/3)Y^{-2/3})$ avec $Y \sim \mathcal{U}([0;1])$.
Nous pouvons donc approcher p_l par $\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3l(l+1)}Y_1^{-1/3} + \dots + \frac{2}{3l(l+1)}Y_n^{-1/3}\right)$ avec de $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de même loi que Y et $n \to +\infty$ (par la loi des grands nombres, $\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3l(l+1)}Y_1^{-1/3} + \dots + \frac{2}{3l(l+1)}Y_n^{-1/3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} p_l$).

(b) La variance de la méthode est

$$\begin{aligned} \mathbb{V}((2/3)Y^{-1/3}) &= \frac{4}{9l^2(l+1)^2}\left(\mathbb{E}(Y^{-2/3}) - \mathbb{E}(Y^{-1/3})^2\right) \\ &= \frac{4}{9l^2(l+1)^2}\left(l(l+1)\int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} u^{-2/3}\times 1du - p_l^2\right) \\ &= \frac{4}{9l^2(l+1)^2}\left(l(l+1)(3l^{-1/3} - 3(l+1)^{-1/3} - p_l^2\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(3l^{-4/3}(l+1)^{-1} - 3l^{-1}(l+1)^{-4/3} - p_l^2 l^{-2}(l+1)^{-2}\right)\,. \end{aligned}$$

(3) Nous avons $p_l = \int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} \frac{2}{3x^{1/3}} dx = \frac{1}{l^{2/3}} - \frac{1}{(l+1)^{2/3}}$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{V}((2/3)Y^{-1/3})}{\mathbb{V}(\mathbb{1}_{[1/(l+1);1/l]}(X))} &= \frac{4}{9}\frac{(3l^{-4/3}(l+1)^{-1} - 3l^{-1}(l+1)^{-4/3} - (l^{-2/3} - (l+1)^{-2/3})^2 l^{-2}(l+1)^{-2})}{(l^{-2/3} - (l+1)^{-2/3})(1 - (l^{-2/3} - (l+1)^{-2/3}))} \\
&= \frac{4}{9} l^{-5/3} \frac{(3(1+\frac{1}{l})^{-1} - 3(1+\frac{1}{l})^{-4/3}(l^{-2/3} - (l+1)^{-2/3})^2 l^{-1/3}(l+1)^2)}{(1 - (1+\frac{1}{l})^{-2/3})(1 - (l^{-2/3} - (l+1)^{-2/3}))} \\
&\underset{l \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Donc la deuxième méthode proposée réduit bien la variance (asymptotiquement en $l \to +\infty$).