Université de Nice - L1 AES - Analyse

http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TD n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1.

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{\ln(2)} &= -4 \\
\ln(x) &= -4\ln(2) \\
x &= \exp(-4\ln(2)) = (\exp(\ln 2))^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}\,.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x^2-1)}{\ln(10)} + 1 &= 2\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x^2)}{\ln(10)} \\
\frac{\ln(x^2-1)-\ln(x^2)}{\ln(10)} &= -1 \\
\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) &= -\ln(10) = \ln(1/10) \\
\frac{x^2-1}{x^2} &= \frac{1}{10} \\
x^2 - 1 &= x^2/10 \\
x^2(1-1/10) &= 1 \\
x &= \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\,.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
2^{x+1} &= 3^x \\
\exp((x+1)\ln(2)) &= \exp(x\ln(3)) \\
(x+1)\ln(2) &= x\ln(3) \\
x(\ln(2)-\ln(3)) &= -\ln(2) \\
x &= -\frac{\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) $f(x) = \exp(x\ln(2))$, $f'(x) = \ln(2)\times\exp(x\ln(2)) = \ln(2)\times 2^x$.

(2) $g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)}\times\frac{1}{x}$.

Exercice 3.

(1) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$ donc

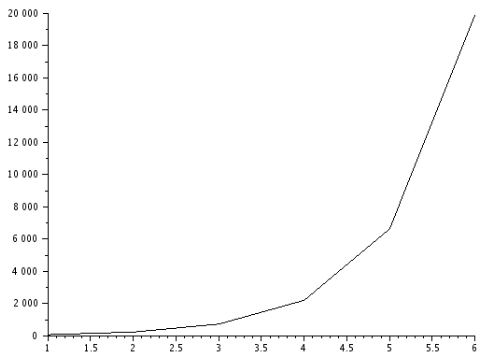
$$\epsilon(f)(x) = x\left(-\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\frac{x}{\ln(x)} = -1 + \frac{1}{\ln(x)}\ .$$

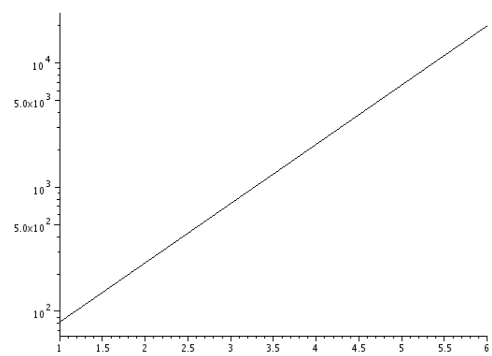
(2) $g(x) = \exp(x\ln(x))$; $g'(x) = \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right)\exp(x\ln(x))$ donc

$$\epsilon(f)(x) = x\left(\ln(x)+1\right)\exp(x\ln(x)) \times \frac{1}{\exp(x\ln(x))} = x\left(\ln(x)+1\right)\ .$$

Exercice 4.

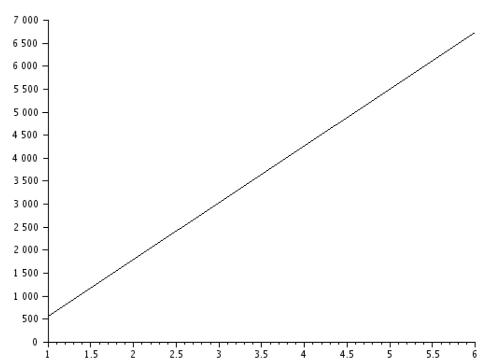
(1) Produit A :

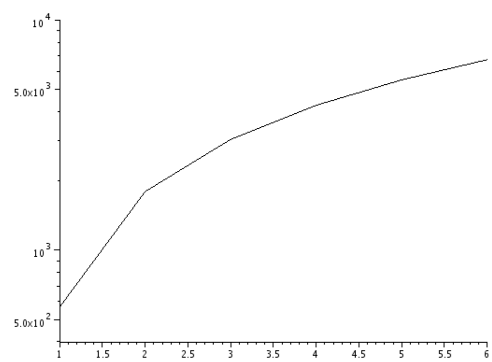




Pour tracer le graphe avec l'échelle logarithmique en ordonnée, on utilise le $\log_{10}$ de la quantité en ordonnée. Par exemple : (année=1,produit A=82) donne le point d'abscisse 1 et d'ordonnée $\log_{10}(82) = 1,91$.

Produit B :





(2) Croissance exponentielle pour A, croissance linéaire pour B. On remarque que la suite $b_1 = 567$, $b_2 = 1801$, ... de la production du produit B est arithmétique de raison 1234 ($b_{n+1} - b_n = 1234$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$) donc on peut écrire : $b_n = b_1 + (n-1) \times 1234$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. On remarque que la suite $a_1 = 82$, $a_2 = 246$, ... de la production du produit B est géométrique de raison 3 ($a_{n+1}/a_n = 3$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$) donc on peut écrire : $a_n = a_1 \times 3^{n-1}$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.