Université de Nice - L1 AES - Analyse

http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TD n$^{\mathrm{o}}$ 2

Exercice 1. Appelons u_0 le capital de départ, u_1 le capital au bout d'un an ... etc. Puisque le capital est placé à 4% par an, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_n \times (4/100) = u_n \times (104/100)$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 104/100$ donc pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0 q^n$. Nous savons que $u_5 = 10000$ donc $10000 = u_0 q^5$, donc ([1])

$$u_0 = \frac{10000}{q^5} = 8219,27$$

(en arrondissant à la deuxième décimale).

Exercice 2. Appelons u_0 le capital de départ, u_1 le capital au bout d'un an ... etc. Puisque le capital est placé à 4% par an, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_n \times (4/100) = u_n \times (104/100)$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 104/100$ donc pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0 q^n$. Nous cherchons n tel que $u_n = 2u_0$, c'est à dire tel que .

$$u_0 q^n = 2u_0 \,,$$

ce qui revient à $q^n = 2$. Ce est équivalent à ([2]) $\exp(n\ln(q)) = 2$. Nous avons ([3]) $2 = \exp(\ln(2))$. Donc l'égalité précédente est équivalente à ([4]) $n\ln(q) = \ln(2)$, c'est à dire $n = \ln(2)/\ln(q)$. On conclut (([1]) et ([5])) que le n cherché est $n = 17,67$ (qui n'est pas entier).

Qu'est ce que cela veut dire ? La suite $u_n = u_0 q^n$ est strictement croissante, la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto u_0 q^x$ aussi. Remarquons que $u_n = f(n)$ pour tout n entier supérieur ou égal à 0. Les calculs ci-dessus nous montrent que $u_0 q^x = 2 \times u_0$ pour $x = 17,67$. Donc $f(17) < f(17,67) = 2 \times u_0 < f(18)$. Donc, au bout de 17 ans, le capital n'a pas doublé. Si on veut un capital final égal au moins au double du capital de départ, il faut attendre 18 ans (ou alors 17,67 années si on peut récupérer le capital pendant l'année).

Exercice 3. La somme placée dans la tirelire augmente de 2 euros à chaque versement. Notons $u_1 = 5$ le premier versement, $u_2 = 7$ le deuxième versement, ... etc. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite arithmétique de raison 2. Le dix-huitième versement est donc $u_{18} = u_1 + 17 \times 2 = 5 + 34 = 39$. Calculons ([6])

$$\sum_{k=1}^{18} u_k = \frac{18 \times (5+39)}{2} = \frac{792}{2} = 396\,.$$

1. à l'aide d'une calculatrice
2. définition de la fonction puissance
3. par définition des fonctions exp et ln
4. en prenant le ln des deux côtés
5. en arrondissant à la deuxième décimale
6. en utilisant la formule de la somme d'une suite arithmétique

Exercice 4. Notons u_n la somme déposée chaque mois ($u_1 = 5$, $u_2 = 6$, $u_3 = 7,20$ ...). L'énoncé nous dit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie $u_{n+1} = u_n + u_n \times (20/100)$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est donc géométrique de raison $q = 1+20/100 = 1,2$. Notons v_n la somme contenue dans la tirelire après n versements ($v_1 = 5$, $v_2 = u_1 + u_2 = 11$, $v_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 18,20$, ...). Nous calculons ([7]) (([1]) et ([5]))

$$v_{18} = \sum_{k=1}^{18} u_k = u_1 \times \left(\frac{1-q^{18}}{1-q}\right) = 640,58\,.$$

Exercice 5.

(1) $u_1 = 3u_0 - 4 = -1$, $u_2 = 3u_1 - 4 = -3 - 4 = -7$, $u_3 = 3u_2 - 4 = -21 - 4 = -25$.

(2) Nous résolvons : $c = 3c - 4 \Leftrightarrow 4 = 2c \Leftrightarrow c = 2$. Pour tout $n \geq 0$, nous avons $v_{n+1} = u_{n+1} - c = 3u_n - 4 - c$; or $u_n = v_n + c$, donc $v_{n+1} = 3(v_n + c) - 4 - c = 3v_n + 3c - 4 - c = 3v_n$. Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

(3) Nous avons $v_0 = u_0 - c = 1 - 2 = -1$. Donc $v_n = v_0 q^n = -3^n$. Donc $u_n = v_n + c = -3^n + 2$ (on peut vérifier que $-3^1 + 2 = -1$, $-3^2 + 2 = -7$, $-3^3 + 2 = -25$ donc cette formule est en accord avec les résultats de la première question).

Exercice 6.

(1) Appliquons les formules du cours (voir la partie « calcul de la mensualité » avec u_{n+1} à la place de C_n, $\tau = 0,4$, $x = M$) : $u_{n+1} = u_n \times (1 + \tau/100) - x$ (ici, la somme dûe au départ est $u_0 = 100000$).
Une explication complémentaire à celle du cours : si je dois u_n le 1er du $(n+1)$-ème mois, je dois $u_n(1 + \tau/100)$ à la fin du $(n+1)$-ème mois (c'est la signification du taux d'intérêt), je paie alors ma mensualité de x, ce qui fait que je dois $u_{n+1} = u_n(1 + \tau/100) - x$ le 1er du $(n+2)$-ème mois.

(2) Commençons par chercher c tel que $c = c \times (1 + \tau/100) - x$. Cette équation est équivalente à $x = c \times \tau/100 \Leftrightarrow c = 100 \times x/\tau$.
Posons $q = 1 + \tau/100$, $v_n = u_n - c$. Nous avons la relation de récurrence : $v_{n+1} = u_{n+1} - c = u_n q - x - c = (v_n + c)q - x - c = v_n q + cq - x - c = v_n q$. Donc $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q, donc $v_n = v_0 q^n$ pour tout $n \geq 0$. Nous avons donc pour tout $n \geq 0$: $u_n = v_n + c = v_0 q^n + c = (u_0 - c)q^n + c$.

(3) L'énoncé nous dit que l'emprunt est remboursé en 10 ans donc $u_{120} = 0$ (il y a 120 mois dans 10 années). Nous avons donc $0 = (u_0 - c)q^{120} + c$, donc $c(q^{120} - 1) = u_0 q^{120}$, $c = u_0 q^{120}/(q^{120} - 1)$, (([1]) et en arrondissant à la première décimale) $c = 262726,6$. D'où (([1]) et ([5])) $x = \tau c/100 = 1050,91$.

7. en utilisant la formule de la somme d'une suite géométrique