Université Nice-Sophia Antipolis
M1 IM, 2023-2024
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, contrôle no 1, sujet A

Durée 1h30. Documents et calculatrices interdits. Rendre l'énoncé avec la copie rapporte 0,5 point sur 20.

QCM (une seule réponse juste par question, deux points par réponse juste). Écrire la réponse sur la copie.

(1) Je veux faire un lissage exponentiel à mémoire courte (les événements du passé lointain ne doivent pas être importants). Rappel : la formule pour la prédiction est la suivante

$$\widehat{x}_{n,h} = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j x_{n-j}.$$

Je choisis
(a) α près de 0
(b) $\alpha = 0.5$
(c) α près 1.

(2) (X_t) est un bruit blanc (au sens des séries temporelles) si
(a) $\forall h, t$, $\mathbb{E}(X_t) = 0$, $\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = 0$,
(b) $\mathbb{E}(X_t)$ ne dépend pas de t, $\mathrm{Var}(X_t, X_{t+h})$ ne dépend pas de t ($\forall h \geq 0$), $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$ ($\forall h > 0$)
(c) $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$ ne dépendent pas de t.

(3) Sous l'hypothèse que les résidues `out$resid` sont un bruit blanc (hypothèse (H0)), une certain statistique de ces résidus doit suivre une loi du $\chi 2$. Je veux tester cette hypothèse au niveau 0.05. J'utilise la commande `R` ad hoc (`Box.test(out$resid,lag=5)`) et l'ordinateur me donne la réponse suivante `X-squared = 0.1046, df = 5, p-value = 0.9998`. Je dois
(a) garder (H0),
(b) rejeter (H0).

(4) Nous traçons les auto-corrélations d'une série temporelle et nous obtenons la figure0.1. Que pouvons nous dire de la série temporelle ?

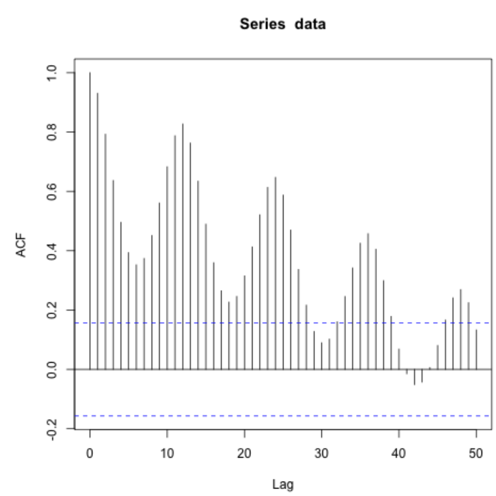

Figure 0.1. ACF

(a) Elle a une composante périodique de période 12.
(b) Elle décroît
(c) Sa période est 12.
(d) Elle a une composante périodique de période 11.

(5) À partir d'une série temporelle `x`, j'éxéxute en `R`: `x1=diff(x);x2=diff(x1);x3=diff(x2)`. Sur les graphiques (obtenus avec `plot`), `x` et `x1` ont des graphes significativement non nuls et `x2`, `x3` sont tout petits. Que puis-je en déduire sur `x` ?
(a) Il a une tendance polynomiale de degré 2.
(b) Il a une tendance polynomiale de degré 1.
(c) Il a une tendance polynomiale de degré 3.

EXERCICES.

(1) **(5 points)** Dans un lissage exponentiel simple de paramètre α, la formule pour la prévision en $n+1$ sachant $x_1, \ldots, x_n$ est
$$\widehat{x}_{n,h} = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (1-\alpha)^j x_{n-j} \, .$$
On veut prévoir la demande d'un produit au temps n + 1 par lissage exponentiel simple de paramètre $\alpha = 0.2$ (nous appelerons la série $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$). La prévision $\widehat{x}_{n-1,1}$ (par lissage exponentiel simple) était de 70 et $x_n = 60$. Calculer $\widehat{x}_{n,1}$.

(2) **(5 points)** Nous avons une série $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$. Nous voulons faire un lissage exponentiel double pour faire une prédiction $\widehat{x}_{n,2}$. Nous hésitons entre les paramètres $(\alpha_1 = 0,1; \beta_1 = 0,1)$ et $(\alpha_2 = 0,2; \beta_2 = 0,2)$. Nous souhaitons sélectionner le couple de paramètres qui a la plus faible erreur quadratique de prédiction sur les données historiques entre 10 et $n-2$. Nous nous intéressons au programme `R` dans le cadre "Programme 1". Dans ce programme, `x` est une série temporelle de période 1 et `n` est égal à 100.

Programme 1

```
al1=0.1; be1=0.1
al2=0.2; be2=0.2
s1=0; s2=0
for (k in 10:n-2)
{
        xw=window(x,1,k)
        xh1=HoltWinters(xw, alpha=al1, beta=be1, gamma=FALSE)
        p1=predict(xh1,n.ahead=2)
        s1=s1+(p1[2]-x[k+2])^2
        xh2=HoltWinters(xw, alpha=al1, beta=be1, gamma=FALSE)
        p2=predict(xh2,n.ahead=2)
        s2=s2+(p2[2]-x[k+2])^2
}
```

(a) Que contient `xw` après le k-ème passage dans la boucle ?
(b) Que contient `p1[2]` après le k-ème passage dans la boucle ?
(c) Que contient `s1` après la boucle ?
(d) On suppose $s1 < s2$. Est-ce que nous devons utiliser (α_1, β_1) ou (α_2, β_2) pour le lissage qui nous donnera une prédiction $\widehat{x}_{n,2}$?