Université Nice-Sophia Antipolis
M1 IM, Séries temporelles, 2023-2024
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, contrôle no 2, sujet A

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Rendre l'énoncé avec la copie rapporte 0,5 point sur 20. Le barème sera décidé lors de la correction.

Exercice 1.
Nous nous intéressons à l'équation :

$$X_t = \frac{3}{4}X_{t-1} - \frac{1}{8}X_{t-2} + \epsilon_t \tag{0.1}$$

(les (ϵ_t) sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$).

(1) Est-ce qu'il existe une solution stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ à l'équation (0.1) ?

(2) Par convention, $X_{-n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit L l'opérateur de décalage sur les suites ($L(X) = (X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$, donc $L(X)_t = X_{t-1}$ pour tout t). Montrer que $(\mathrm{Id} - (3/4)L + (1/8)L^2)(X)_t = \epsilon_t$, pour tout $t \geq 0$.

(3) Nous cherchons $\psi_0, \psi_1, \dots$ tels que

$$(1 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}z^2) \times (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots) = 1$$

(pour $z \in \mathbb{C}$ dans un disque de convergence convenable).

(a) Calculer ψ_0 et ψ_1.

(b) Trouver une relation de récurrence entre ψ_k, ψ_{k-1} et ψ_{k-2} (pour tout $k \geq 2$).

(c) Calculer ψ_k pour tout k.

(4) Nous admettons le résultat : $X_t = \sum_{k\geq 0} \psi_k \epsilon_t$ (pour tout $t \geq 0$, où (X_t) est maintenant la solution stationnaire de l'équation (0.1). Calculer $\mathrm{Var}(X_t)$ (mettre le résultat sous forme de somme de trois fractions rationnelles).

Exercice 2. Nous nous intéressons à une série temporelle x (représentant une production d'électricité), voir figure (0.1). Les données sont mensuelles (entre février 1985 et janvier 2010).

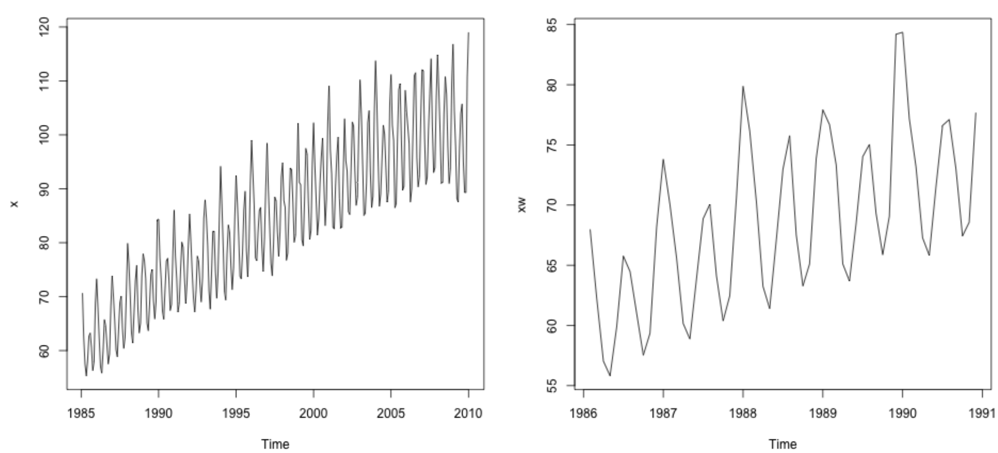


FIGURE 0.1. Série x

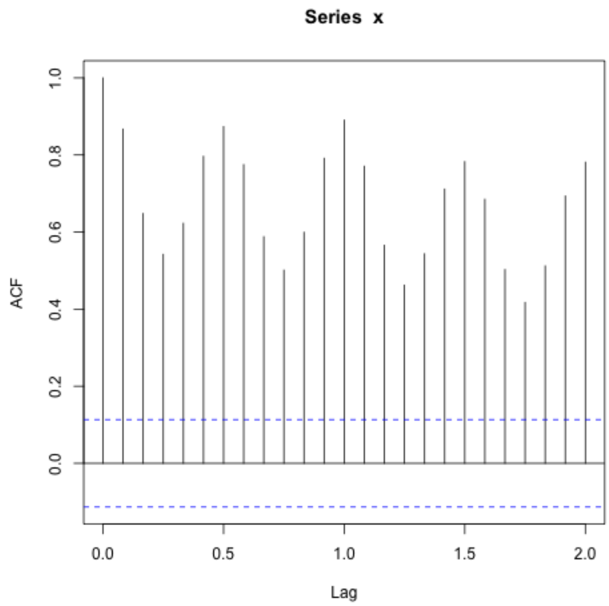


FIGURE 0.2. Auto-corrélations de x

(1) La série x est-elle stationnaire ?

(2) Nous traçons les auto-corrélations de x (voir figure (0.2)). Est-ce que x a une composante périodique ? Si oui, quelle est la période de cette composante ?

(3) Nous exécutons :

```
xw=window(x,start=c(1985,2),end=c(2009,1))
```

Quelles sont les données dans `xw` ?

(4) Nous exécutons

```
y=diff(xw,lag=12)
plot(y)
adf.test(y)
```

(la dernière instruction est un test de Dickey-Fuller). Nous voulons tester (H0) y est non stationnaire contre (H1) y est stationnaire (au niveau $0,05$). Le test nous renvoie

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data:  y Dickey-Fuller = -5.5939, Lag order = 6, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Que faut-il en conclure ?

(5) Nous exécutons

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(y)
pacf(y)
```

ce qui nous donne la figure (0.3). Est-ce que y est plutôt un AR ou un MA ? de quel indice ? Comment s'appelle alors le processus xw ?

(6) Nous exécutons

```
out=arima(xw,order=c(0,1,3))
Box.test(out$resid)
```

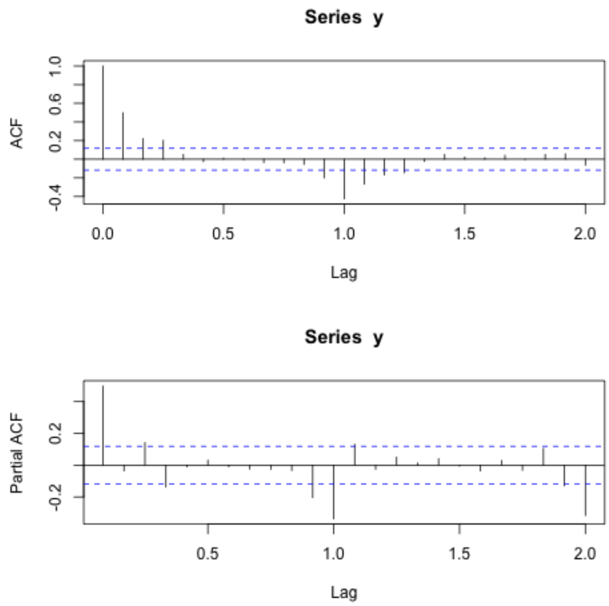


FIGURE 0.3. ACF/PACF de y

et nous obtenons

```
Box-Pierce test
data:   out$resid X-squared = 0.20644, df = 1, p-value = 0.6496
```

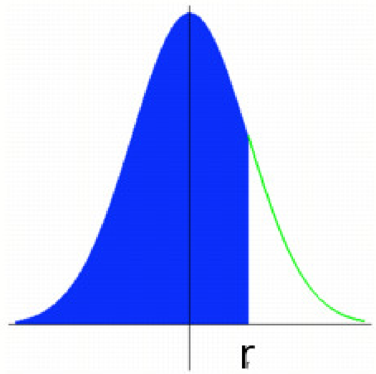
Que peut-on en conclure pour xw ? (Vous choisirez le niveau de confiance qui vous convient.)

(7) Nous voulons maintenant tracer une prédiction pour xw, avec un intervalle de confiance à 90% en utilisant

```
pred<-predict(out,n.ahead=12)
plot(x)
lines(pred$pred, col='red')
lines(pred$pred+a*pred$se, col='blue')
lines(pred$pred-a*pred$se, col='blue')
```

où la constante a est à déterminer. Que prenez-vous pour a ? Vous pourrez vous aider de la table dans la figure (0.4).

$$P(X \leq r) \text{ avec } X \sim N(\mathbf{0{,}1})$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Figure 0.4. Table de la loi normale