Université Nice-Sophia Antipolis
M1 IM, Séries temporelles, 2023-2024
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, corrigé du contrôle no 2, sujet A

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Rendre l'énoncé avec la copie rapporte 0,5 point sur 20.

Exercise 1.

(1) Le polynôme associé à l'équation est

$$\begin{aligned} A(X) &= 1 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8}X^2 \\ &= \left(1 - \frac{X}{2}\right)\left(1 - \frac{X}{4}\right) \end{aligned}$$

de racines $\{2; 4\}$ qui sont de module > 1. Donc l'équation admet une solution stationnaire.

(2)

$$(\mathrm{Id} - (3/4)L + (1/8)L^2)(X)_t = X_t - (3/4)X_{t-1} + (1/8)X_{t-2} = \epsilon_t$$

(3)

(a) Le terme constant de la série est ψ_0 donc $\psi_0 = 1$. Le terme en z de la série est $\psi_1 - 3/4$ donc $\psi_1 = 3/4$.

(b) Pour $k \geq 2$, le terme en z^k de la série est $\psi_k - (3/4)\psi_{k-1} + (1/8)\psi_{k-2}$. Donc nous avons la relation

$$\psi_k = \frac{3}{4}\psi_{k-1} - \frac{1}{8}\psi_{k-2}\,.$$

(c) Le polynôme associé à la relation ci-dessus est

$$\begin{aligned} P(X) &= X^2 - (3/4)X + (1/8) \\ &= \left(X - \frac{1}{4}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

qui a pour racines $\{1/4; 1/2\}$. La forme générale de la solution est donc $\psi_k = \alpha(1/4)^k + \beta(1/2)^k$, avec deux constantes α, β que nous déterminons en regardant ψ_0, ψ_1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} &= \frac{3}{4} \end{cases}$$

Nous avons donc $\beta = 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4} + \frac{1-\alpha}{2} &= \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} &= \frac{\alpha}{4} \\ \alpha &= -1 \\ \beta &= 2\,. \end{aligned}$$

(4) Nous avons (puisque les ϵ_t sont indépendants)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_t) &= \sum_{k\geq 0} \psi_k^2 \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \right)^2 \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + 4\left(\frac{1}{8}\right)^k \\
\text{(séries géométriques)} &= \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{4}{1-\frac{1}{4}} + \frac{4}{1-\frac{1}{8}} \\
&= \frac{16}{15} + \frac{16}{3} + \frac{32}{7}\,.
\end{aligned}$$

Exercise 2.

(1) La moyenne de la série augmente donc la série n'est pas stationnaire.
(2) Les auto-corrélations sont (vaguement) périodiques de période 6. Le zoom sur la série x montre un pic en hiver et un pic plus faible en été. Donc la série a une composante périodique de période 12.
(3) Dans xw, nous avons la production d'électricité mensuelle de février 1985 à janvier 2009.
(4) La p-valeur est plus petite que $0,05$ donc nous rejetons (H0) et nous concluons que la série y est stationnaire.
(5) Nous interprétons les graphes de la manière suivante : les ACF sont nulles après le rang 3 et les PACF tendent vers 0. Le processus y serait donc un MA(3). La série xw est alors un ARIMA(0,1,3).
(6) Les lignes de programme estiment les paramètres comme si xw était un ARIMA(0,1,3), puis on teste si les résidus forment un bruit blanc (test de Box-Pierce). Nous décidons que nous voulons un niveau d'erreur de 5%. La p-valeur est plus grande que $0,05$ donc nous concluons que les résidus forment un bruit blanc et que donc notre modèle ARIMA(0,1,3) est valide.
(7) La quantité `pred$se` est l'écart-type de l'erreur de prédiction. Il donc choisir a tel que (avec Z v.a. de loi $\mathcal{N}(0;1)$) $\mathbb{P}(Z > a) \leq 0,05$ (mais pas beaucoup plus petit). D'après la table, il faut donc prendre $a = 1,65$.