

Séries temporelles, contrôle no 2, sujet B

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Rendre l'énoncé avec la copie rapporte 0,5 point sur 20. Le barème sera décidé lors de la correction.

Exercice 1.

Nous nous intéressons à l'équation :

$$(0.1) \quad X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{8}X_{t-2} + \epsilon_t$$

(les ϵ_t) sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$).

- (1) Est-ce qu'il existe une solution stationnaire $(X_t)_{t \geq 0}$ à l'équation (0.1) ?
- (2) Par convention, $X_{-n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit L l'opérateur de décalage sur les suites ($L(X) = (X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$), donc $L(X)_t = X_{t-1}$ pour tout t . Montrer que $(\text{Id} - (1/4)L - (1/8)L^2)(X)_t = \epsilon_t$, pour tout $t \geq 0$.
- (3) Nous cherchons ψ_0, ψ_1, \dots tels que

$$\left(1 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2\right) \times (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots) = 1$$

(pour $z \in \mathbb{C}$ dans un disque de convergence convenable).

- (a) Calculer ψ_0 et ψ_1 .
- (b) Trouver une relation de récurrence entre ψ_k , ψ_{k-1} et ψ_{k-2} (pour tout $k \geq 2$).
- (c) Calculer ψ_k pour tout k .
- (4) Nous admettons le résultat : $X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \epsilon_{t-k}$ (pour tout $t \geq 0$, où (X_t) est maintenant la solution stationnaire de l'équation (0.1). Calculer $\text{Var}(X_t)$ (mettre le résultat sous forme de somme de trois fractions rationnelles).

Exercice 2. Nous nous intéressons à une série temporelle x (représentant le prix des avocats), voir figure (0.1). Les données sont hebdomadaires.

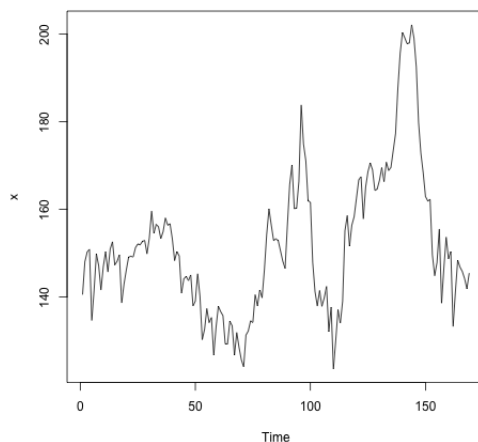


FIGURE 0.1. Série x

- (1) La série x est-elle stationnaire?
- (2) Nous traçons les auto-corrélations de x (voir figure (0.2)). Est-ce que x a une composante

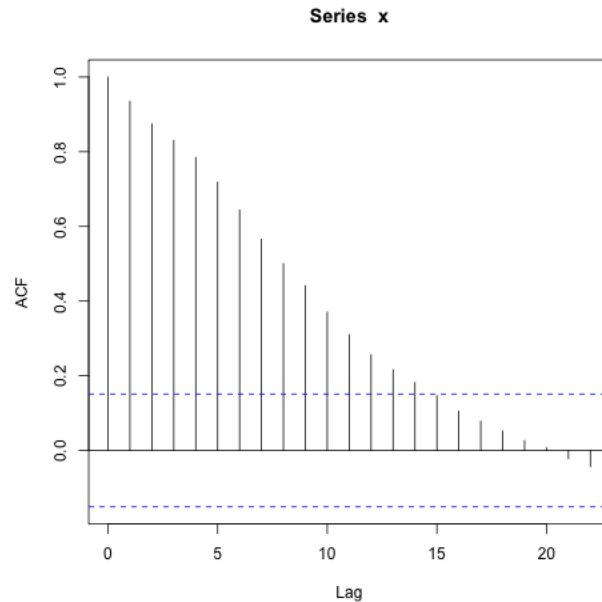


FIGURE 0.2. Auto-corrélations de x

périodique? Si oui, quelle est la période de cette composante?

- (3) La série x est de longueur 169. Nous exécutons :

```
xw=window(x,1,160)
```

Quelles sont les données dans xw ?

- (4) Nous exécutons

```
y=diff(xw)
plot(y)
adf.test(y)
```

(la dernière instruction est un test de Dickey-Fuller). Nous voulons tester (H0) y est non stationnaire contre (H1) y est stationnaire (au niveau 0,01). Le test nous renvoie

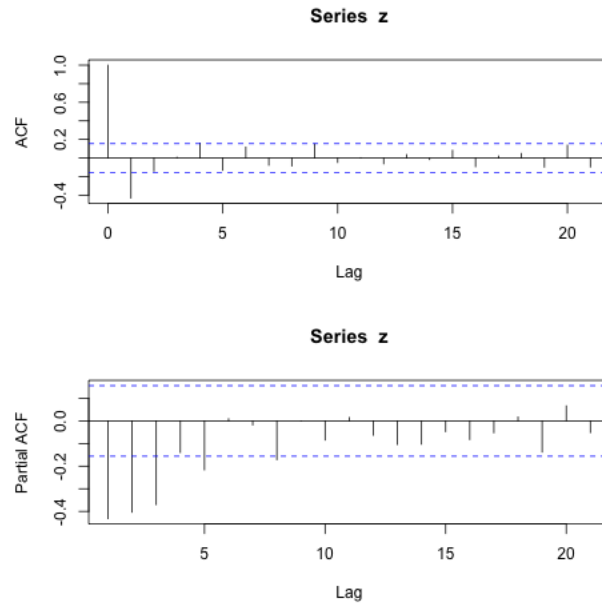
```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: y Dickey-Fuller = -3.9377, Lag order = 5, p-value = 0.01407
alternative hypothesis: stationary
```

Que faut-il en conclure?

- (5) Nous exécutons

```
z=diff(y)
plot(z)
adf.test(z)
```

(la dernière instruction est un test de Dickey-Fuller). Nous voulons tester (H0) z est non stationnaire contre (H1) z est stationnaire (au niveau 0,01). Le test nous renvoie

FIGURE 0.3. ACF/PACF de y

Augmented Dickey–Fuller Test

```
data: z Dickey–Fuller = -7.6744, Lag order = 5, p-value = 0.01
```

```
alternative hypothesis: stationary
```

```
Warning message: In adf.test(z) : p-value smaller than printed p-value
```

Que faut-il en conclure ?

(6) Nous exécutons

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(z)
pacf(z)
```

ce qui nous donne la figure (0.3). Est-ce que z est plutôt un AR ou un MA ? de quel indice ? Comment s'appelle alors le processus xw ?

(7) Nous exécutons

```
out=arima(xw,order=c(0,2,1))
Box.test(out$resid)
```

et nous obtenons

Box–Pierce test

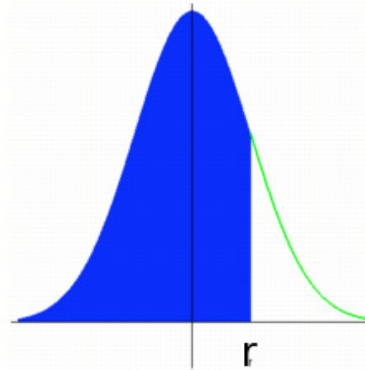
```
data: out$resid X-squared = 0.0073155, df = 1, p-value = 0.9318
```

Que peut-on en conclure pour xw ? (Vous choisirez le niveau de confiance qui vous convient.)

(8) Nous voulons maintenant tracer une prédiction pour xw , avec un intervalle de confiance à 88% en utilisant

```
pred<-predict(out,n.ahead=9)
plot(x)
lines(pred$pred,col='red')
lines(pred$pred+a*pred$se,col='blue')
lines(pred$pred-a*pred$se,col='blue')
```

$$P(X \leq r) \text{ avec } X \sim N(0,1)$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

FIGURE 0.4. Table de la loi normale

où la constante a est à déterminer. Que prenez-vous pour a ? Vous pourrez vous aider de la table dans la figure (0.4).