

Université de Nice
Faculté de Droit et Sciences Économiques

AES - L1

**Cours de Techniques Quantitatives
Appliquées**

Analyse

Premier et Deuxième Semestre

Stéphane Descombes

Année 2009-2010

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions numériques	1
1.1	Comment se repérer à l'aide des mathématiques	1
1.2	Rappel sur les intervalles	5
1.3	Notion d'une fonction numérique d'une variable réelle	5
1.4	Exemples et contre-exemples de fonctions	6
1.5	Quelques fonctions usuelles	12
1.5.1	Fonctions constantes	12
1.5.2	Fonctions constantes par morceaux	12
1.5.3	Fonctions linéaires ou affines	13
1.5.4	Fonctions quadratiques	14
1.5.5	Polynômes de degré quelconque	19
1.5.6	Fonctions quotients	20
1.6	Notion d'une fonction numérique de deux variables réelles	21
1.7	Exemples et contre-exemples de fonctions de deux variables réelles	22
1.7.1	Courbes de niveau	24
1.8	Quelques fonctions usuelles	24
1.8.1	Fonctions linéaires ou affines	24
1.8.2	Fonctions quadratiques	25
1.8.3	Fonctions puissances du type $x^a y^b$	27
2	Dérivées et dérivées partielles	29
2.1	Définition de la dérivée dans le cas d'une variable	29
2.1.1	Contre-exemples de fonctions dérivables en un point	30
2.1.2	Dérivée de fonctions usuelles	32
2.2	Définition des dérivées partielles dans le cas de fonctions de deux variables	33
2.3	Sens de variation, dérivée seconde et convexité pour les fonctions d'une variable	37
2.4	Dérivées partielles secondes et convexité pour les fonctions de deux variables	41
2.5	Fonctions homogènes	44
3	Optimisation	45
3.1	Extrema locaux et globaux de fonctions d'une variable	45
3.2	Extrema locaux des fonctions de deux variables	48
3.3	Plus petite ou plus grande valeur d'une fonction	50
3.4	Extrema liés	52

4	Exponentielles et logarithmes	55
4.1	Les fonctions exponentielles	55
4.2	Fonctions réciproques	58
4.3	Fonctions logarithmes	59
4.4	Dérivée logarithmique et élasticité	62
4.5	Croissances comparées pour des grandes valeurs de x	63
5	Croissances linéaires et exponentielles	65
5.1	Progressions arithmétiques et géométriques	65
5.2	Croissance exponentielle, croissance linéaire, taux de croissance	67
5.3	Échelles logarithmiques	70
6	Intégrale d'une fonction d'une variable	77
6.1	Primitives d'une fonction d'une variable	77
6.1.1	Calcul de primitives	77
6.1.2	Intégration par parties	80
6.2	Applications des primitives au calcul d'aire	80
6.3	Intégrales généralisées	86
6.4	Quelques applications	86
6.4.1	Calcul d'un surplus	86
6.4.2	Montant d'un impôt par tranches	88
7	Equations et inéquations linéaires	91
7.1	Equations, inéquations et systèmes linéaires à au plus deux inconnues	91
7.1.1	Equations linéaires à une seule inconnue	91
7.1.2	Equations linéaires à deux inconnues	91
7.1.3	Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues	91
7.1.4	Inéquations linéaires à une inconnue	95
7.1.5	Inéquations linéaires à deux inconnues	96
7.2	Systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues	98
7.2.1	Résolution par la méthode du pivot de Gauss	101
8	Matrices	107
8.1	Quelques matrices particulières	107
8.2	Opérations sur les matrices	108
8.2.1	Addition de matrices	108
8.2.2	Multiplication par un nombre	108
8.2.3	Produit de deux matrices	109
8.3	Inversion de matrices et résolution de systèmes linéaires	110

Table des figures

1	Représentation de la droite réelle.	2
2	Représentation dans le plan.	3
3	Représentation dans l'espace.	4
4	Graphes des fonctions f_1 et f_2	7
5	Graphes des fonctions f_3 et f_4	7
6	Graphe de la fonction f_5	8
7	Contre-exemples de fonctions.	9
8	Exemples de sens de variation de fonctions.	10
9	Exemple de zéros d'une fonction.	11
10	Exemple de deux fonctions constantes, l'une valant 1, l'autre -1	12
11	Exemple de fonctions constantes par morceaux.	13
12	Exemple d'une droite.	14
13	Exemple de droites pour différentes valeurs de a et $b = 0$	15
14	Exemple d'une parabole avec $a > 0$	16
15	Exemple d'une parabole avec $a < 0$	16
16	Graphe de la fonction f_1	18
17	Deux exemples de polynômes.	19
18	Deux exemples de fonctions homographiques.	21
19	Exemple de graphe d'une fonction.	22
20	Graphe des fonctions f_1 et f_2	23
21	Contre-exemple d'une fonction.	23
22	Exemple d'un plan.	25
23	Graphe et courbes de niveau de $z = x^2 + y^2$	25
24	Graphe et courbes de niveau de $z = 2 - x^2 - y^2$	26
25	Graphe et courbes de niveau de $z = x^2 - y^2$	26
26	Graphe et courbes de niveau de $z = xy/5$	26
27	Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2, b = 1/4$	27
28	Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2$ et $b = 1/2$	28
29	Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2$ et $b = 2$	28
1	Exemples de fonctions non dérivables en un point.	31
2	Exemple de la fonction racine carrée.	31
3	Exemple de plan tangent.	34
4	Graphe de $z = x^2 + y^2$ et son plan tangent au point $(1, 1, 2)$	35
5	Exemple du vecteur \vec{u}	36
6	Représentation de la tangente et du gradient.	37
7	Graphe de la fonction f	38

8	Courbe croissante située au dessus de sa tangente, Croissance accélérée . . .	39
9	Courbe croissante située au dessous de sa tangente, Croissance freinée . . .	39
10	Courbe décroissante située au dessus de sa tangente, Décroissance freinée	40
11	Courbe décroissante située au dessous de sa tangente, Décroissance accélérée	40
12	Graphe de la fonction f	43
1	Un exemple d'extrema.	45
2	Graphe des deux fonctions f_1 et f_2	46
3	Un exemple de fonction sans minimum et maximum global.	47
4	Graphe de f	48
5	Graphe de f	50
6	Domaine triangulaire.	52
7	Graphe de f	53
8	Exemple d'extrema liés.	54
1	Le graphe de la fonction exponentielle et une image de la tour Eiffel (issue de Wikipedia).	55
2	Graphes des fonctions qui à x associent ae^{bx} , cas $a > 0, b > 0$ et $a > 0, b < 0$.	56
3	Graphes des fonctions qui à x associent ae^{bx} , cas $a < 0, b > 0$ et $a < 0, b < 0$.	57
4	Graphes des fonctions qui à x associent a^x , cas $a < 1$ en bleu, $a = 1$ en rouge et $a > 1$ en vert.	58
5	Un exemple de fonction posant un problème pour définir la fonction réciproque.	59
6	Graphes des fonctions logarithme, en bleu, exponentielle, en vert et première bissectrice en rouge.	60
7	Graphes des fonctions \ln_a , pour $a = 2$ et $a = 10$	61
1	Exemple de progression arithmétique.	65
2	Exemple de progression géométrique.	67
3	Croissance exponentielle en rouge et linéaire en bleu	70
4	Évolution d'une population.	71
5	Évolution d'une population sur une aute échelle.	72
6	Graphe de la fonction exponentielle sur un repère semi-logarithmique.	73
7	Graphe de fonctions exponentielles sur un repère semi-logarithmique.	74
8	Quelques fonctions sur un repère log-log.	75
1	Définition graphique d'une aire.	81
2	Cas d'une fonction constante.	81
3	Cas de la fonction identité.	82
4	Additivité.	82
5	Propriété des rectangles.	83
6	Calcul approché d'une intégrale.	84
7	Représentation graphique du surplus.	87
8	Exemple de calcul d'un impôt.	89
9	Graphe de la fonction permettant de calculer l'impôt à payer.	90
1	Exemple d'une solution unique.	92
2	Exemple d'une infinité de solutions.	92
3	Exemple où il n'y a aucune solution.	93

4	Interprétation graphique de l'exemple précédent.	95
5	Interprétation graphique du système 7.1	95
6	Interprétation graphique du système 7.2	96
7	Interprétation graphique du système 7.3	96
8	Interprétation graphique d'une inéquation linéaire à deux inconnues	97
9	Interprétation graphique des solutions du système 7.4	98
10	Exemple où les trois plans se coupent en un seul point	99
11	Exemple où il n'y a aucune solution, P et P'' étant parallèles	100
12	Exemple où les trois plans se coupent selon une droite	100
13	Exemple où P , P' et P'' sont confondus	101

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions numériques

Cette première partie du cours concerne les fonctions numériques. On commence par rappeler les méthodes utilisées par les mathématiciens pour se repérer sur une droite, dans le plan et dans l'espace. On donnera ensuite quelques définitions sur les fonctions et on terminera avec de nombreux exemples.

1.1 Comment se repérer à l'aide des mathématiques

Il est toujours important de savoir se repérer et les mathématiciens utilisent pour cela des nombres. Les nombres vous en avez déjà rencontré beaucoup, les plus simples sont les entiers naturels $0, 1, 2, \dots, 5, 6, \dots$; l'ensemble des entiers naturels est appelé \mathbb{N} , qui vient de l'italien «Naturale», et on note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Si on ajoute à ces entiers naturels, les entiers relatifs, on obtient l'ensemble appelé \mathbb{Z} , qui vient de l'allemand «Zahl» qui veut dire nombre, défini par

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Avec cet ensemble, on peut construire l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels qui, par définition, s'écrivent comme le quotient de deux entiers relatifs. Par exemple, $4/3$ ou $-5/17$ sont des nombres rationnels. \mathbb{Q} vient de l'italien «Quotiente». Enfin, si on considère tous les nombres que vous connaissez, on arrive à l'ensemble \mathbb{R} , que l'on appelle l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble contient tous les nombres rationnels plus beaucoup d'autres, appelés irrationnels, comme $\sqrt{2}$, la racine carrée de 2, ou π .

Revenons à la façon de se repérer des mathématiciens, on utilise donc les nombres réels que l'on repère les uns par rapport aux autres en associant à chacun d'eux un point sur une droite. On appelle souvent cette droite, la droite réelle (pour rappeler qu'elle correspond aux nombres réels) et elle est représentée sur le figure 1.

On peut facilement se repérer sur cette droite vu que 0 constitue l'origine. Prenons deux exemples pour voir comment on utilise, sans le savoir, ce type de représentation. Imaginons tout d'abord que vous vous promenez sur la Promenade des Anglais, si quelqu'un vous appelle sur votre téléphone portable et vous demande où vous êtes, vous pouvez répondre que vous êtes devant tel ou tel hôtel. Mais si la personne à qui vous parlez ne connaît que très peu Nice, cela ne lui donnera aucune information. Alors que si vous lui dites que la Promenade des Anglais suit la mer, que l'on peut presque considérer que c'est une ligne droite et que vous

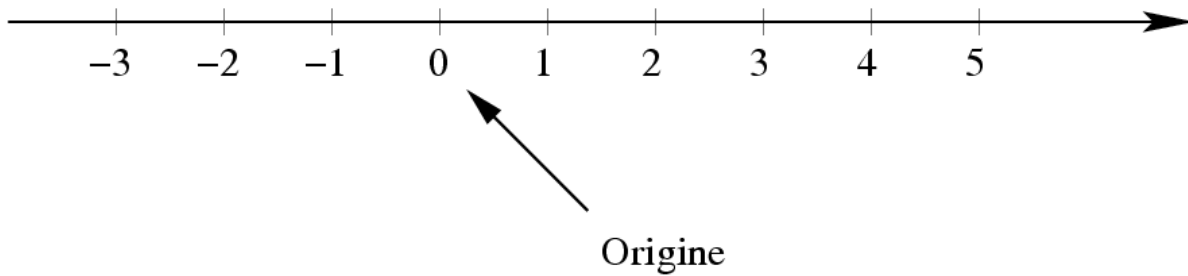


FIG. 1 – Représentation de la droite réelle.

fixer l'origine à l'est ou à l'ouest, il suffit de lui dire combien de mètres vous avez parcouru depuis l'origine. La personne sera ainsi où vous êtes.

Deuxième exemple, souvent dans le TGV (par exemple de Marseille à Paris) la personne qui est à côté de vous a son téléphone portable qui sonne (je dis souvent car je parle en connaissance de cause) et elle répond à la question "T'es où ?" par "Dans le train, nous avons fait en gros 100 kilomètres depuis Marseille" ou alors "Dans le train, à 150 kilomètres de Paris". Dans les deux cas, cette personne a fixé une origine, soit Marseille, soit Paris et exprime la distance depuis cette origine. Elle utilise donc, parfois sans s'en rendre compte, une représentation sur la droite réelle.

On peut ensuite généraliser cette idée pour se repérer dans le plan. Par exemple, vous êtes dans votre salle à manger et quelqu'un vous appelle sur votre téléphone portable, pour lui dire votre position exacte, vous pouvez lui dire que vous êtes à 2 mètres de longueur et 3 mètres de largeur de la porte d'entrée. Vous choisissez donc comme origine, la porte d'entrée. On peut donc faire pareil et généraliser l'idée de droite réelle, à chaque point du plan, on associe un couple de nombres réels, le premier nombre est l'**abscisse**, il est représenté sur l'axe horizontal, le second est l'**ordonnée**, il est représenté sur l'axe vertical. Le couple de ces deux nombres réels constitue les **coordonnées** du point. A titre d'exemple, les points $(-1, 1.5)$ et $(3, 4)$ sont représentés sur la figure 2.

L'axe des abscisses, ou axe horizontal, est constitué de l'ensemble des points du plan d'ordonnée nulle, on note cela $\{(x, y) \mid y = 0\}$. L'axe des ordonnées (ou axe vertical) est constitué de l'ensemble des points du plan d'abscisse nulle. On remarque donc, au passage, que, par habitude, la variable x est utilisée pour les abscisses et la variable y pour les ordonnées.

Exercice 1 Représenter les deux ensembles suivants : $\{(x, y) \mid x = 1\}$ et $\{(x, y) \mid y = 2\}$. Quel est le seul point qui est dans les deux ensembles à la fois ?

La dernière généralisation que nous allons faire concerne la représentation dans l'espace. Si vous êtes dans un avion qui vient de décoller de l'aéroport de Nice, vous commencez par regarder par le hublot pour voir où vous seriez si l'avion était à l'altitude 0 (vous cherchez donc à vous situer dans le plan) puis vous regarder à quelle altitude vous êtes. Pour se repérer dans l'espace, on associe à chaque point de l'espace un *triplet* de nombres réels. Le premier est l'**abscisse** du point, représenté sur l'un des axes horizontaux, le deuxième est l'**ordonnée** du point, représenté sur le second axe horizontal et le troisième est la **cote** du point, représenté sur l'axe vertical. Le plan horizontal appelé Oxy (ou plan tout court) est constitué de l'ensemble des points de cote nulle, c'est-à-dire $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$. On remarque que la variable z , suite logique de x et y , est utilisée pour les cotes.

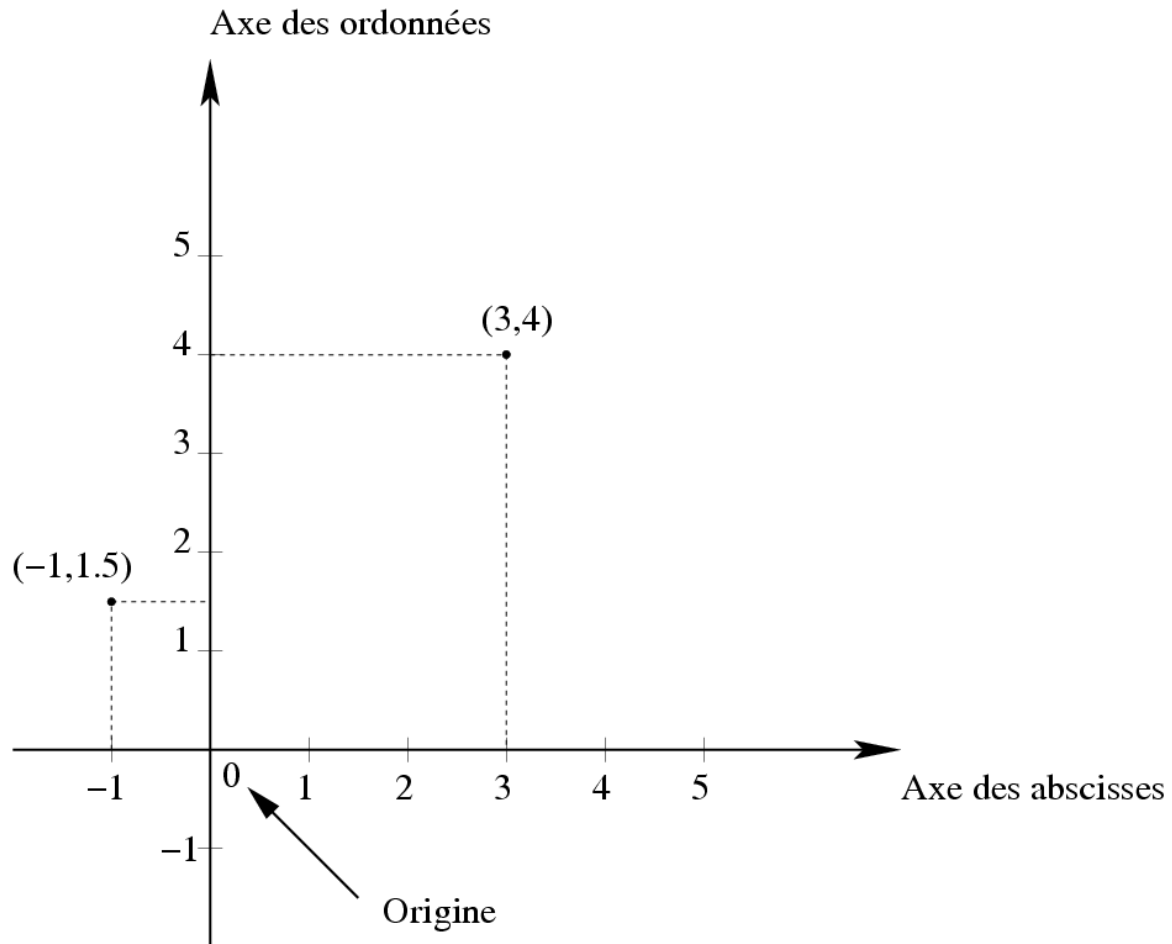


FIG. 2 – Représentation dans le plan.

A titre d'exemple, le point $(3, 5, 4)$ est représenté sur la figure 3.

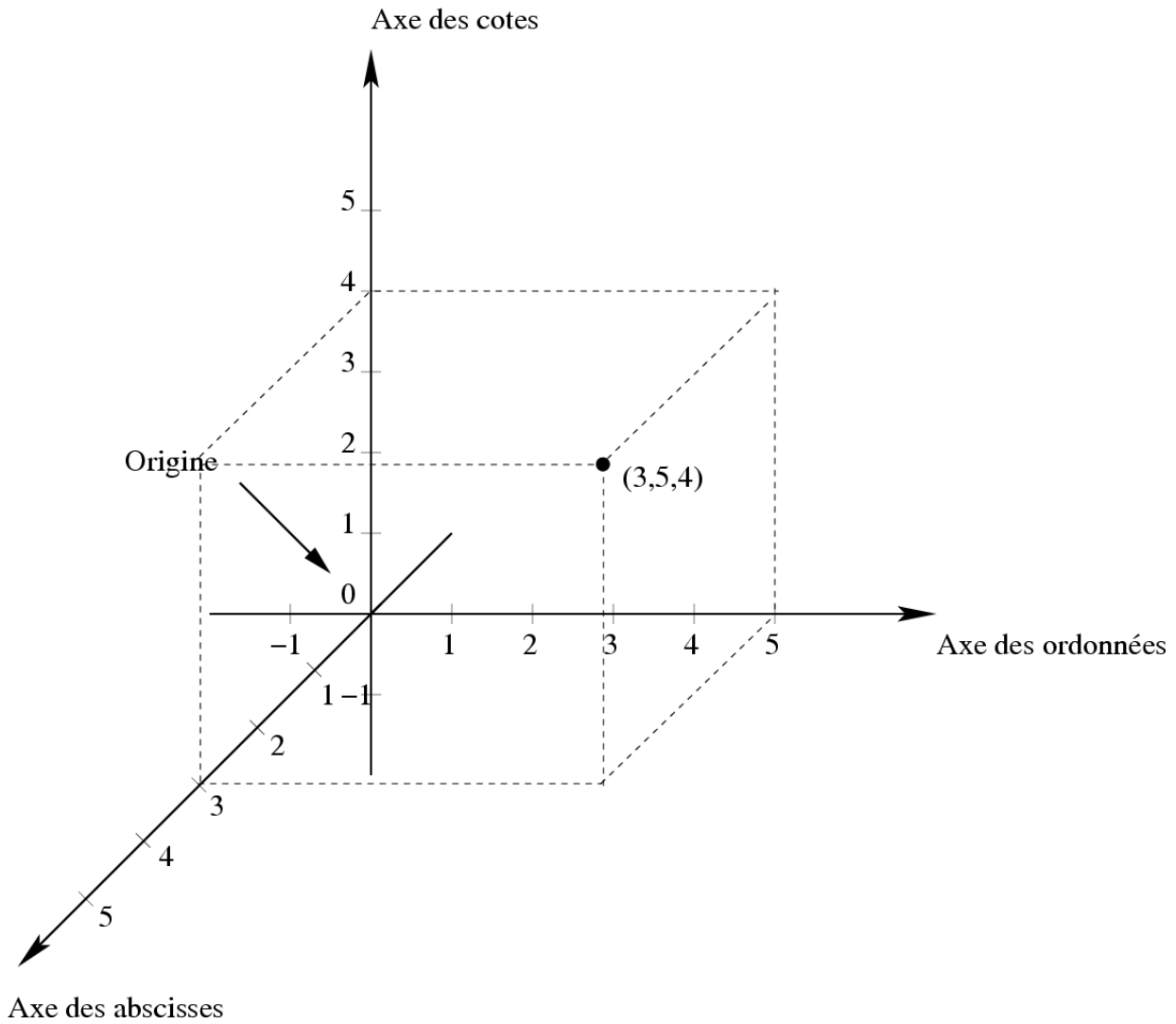


FIG. 3 – Représentation dans l'espace.

Exercice 2 Représenter dans l'espace les points $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$. Représenter l'ensemble des points d'abscisse nulle, l'ensemble des points de cote égale à 1.

On n'a pas toujours envie de se servir de la droite réelle en entier, pour se restreindre et donc se limiter à une partie seulement, on utilise la notion d'intervalle que nous allons redéfinir.

1.2 Rappel sur les intervalles

Il y a neuf types d'intervalles sur \mathbb{R} , soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on note :

- $]a, b[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$,
- $]a, b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$,
- $[a, b[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$,
- $[a, b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$,
- $] - \infty, b[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x < b$,
- $] - \infty, b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq b$,
- $]a, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x$,
- $[a, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x$,
- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Le signe ∞ se prononce "infini".

1.3 Notion d'une fonction numérique d'une variable réelle

Après ces quelques rappels sur les nombres réels et sur la représentation, on arrive à la notion de fonction numérique, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} , d'une variable réelle dont voici la définition.

Definition 1 Une fonction f d'une variable réelle est une relation qui à chaque valeur d'une variable réelle x associe **au plus** une valeur $f(x)$.

Par exemple, le nombre de litres consommés par une voiture est une fonction de la distance qu'elle parcourt et le prix d'un litre d'essence dans une station service est une fonction du temps. De même, si on effectue les relevés heure par heure de la température T et de la pression P en un endroit donné (par exemple un amphithéâtre), les valeurs relevées sont chacune des fonctions du temps. En revanche T n'est pas en général une fonction de P car la même pression peut être relevée avec plusieurs températures distinctes.

A une fonction numérique d'une variable réelle est associée la notion de domaine de définition que nous allons définir :

Definition 2 L'ensemble des nombres réels x auxquels correspond une valeur $f(x)$ est le **domaine de définition** de f , c'est une partie de \mathbb{R} .

Remarque 1 Le domaine de définition d'une fonction numérique f d'une variable réelle est donc l'ensemble des valeurs de x pour lesquels l'opération permettant de calculer $y = f(x)$ est permise. Si, par exemple, en calculant $f(x)$, on doit faire une division par 0 ou extraire une racine carrée d'un nombre réel négatif, c'est que x n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Une fois défini le domaine de définition de la fonction, nous pouvons parler de la représentation graphique de cette fonction en introduisant la notion de graphe :

Definition 3 *Le graphe d'une fonction numérique f d'une variable réelle x est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x varie sur le domaine de définition de la fonction f .*

Remarque 2 *Les données de f et de son graphe étant équivalente, on dit que le graphe de f est la **courbe représentative** de f .*

Avant de donner plusieurs exemples, donnons une dernière définition très importante pour définir une fonction.

Definition 4 *L'ensemble des valeurs $f(x)$ prises par la fonction quand x varie sur le domaine de définition de f est l'**ensemble des valeurs** de f .*

Par exemple, quand vous voulez faire le plein d'essence de votre voiture, vous cherchez un endroit où l'essence est la moins chère. Vous regardez donc l'ensemble des valeurs de la fonction dans les différentes stations service proches de chez vous et vous choisissez celle où le prix est le plus bas.

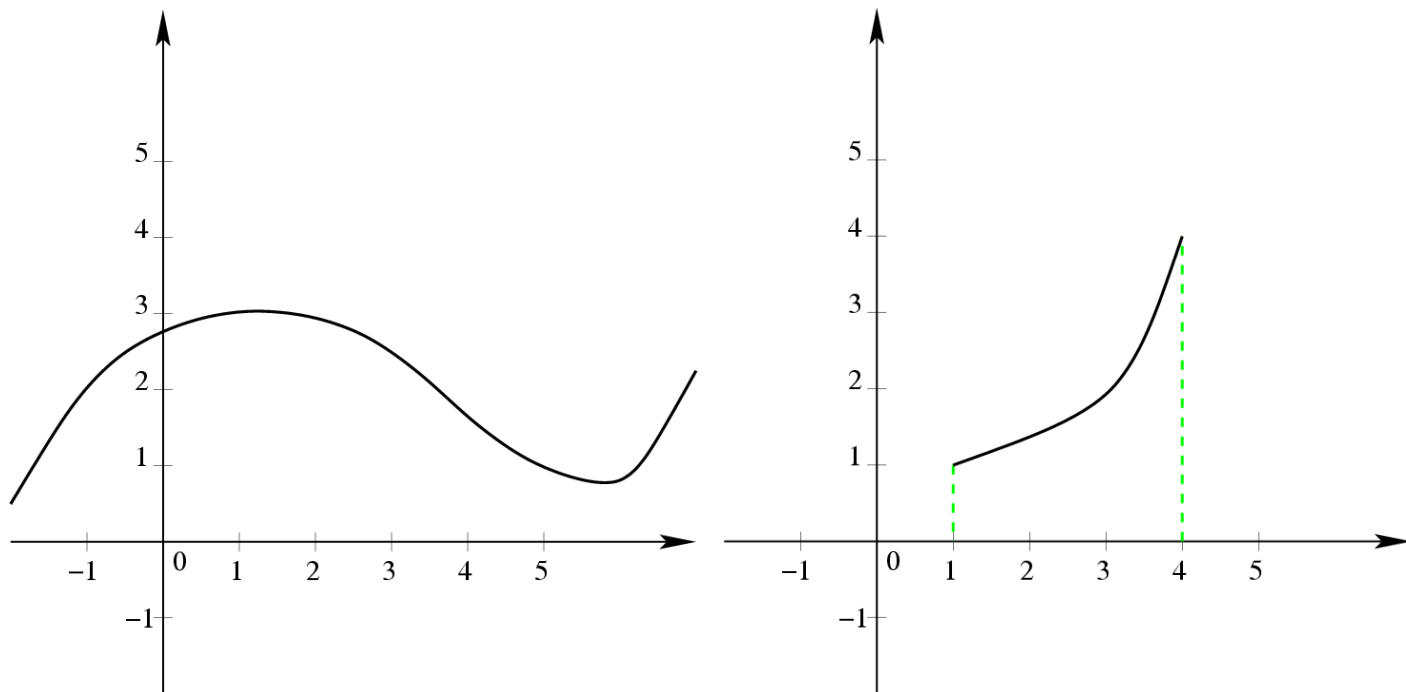
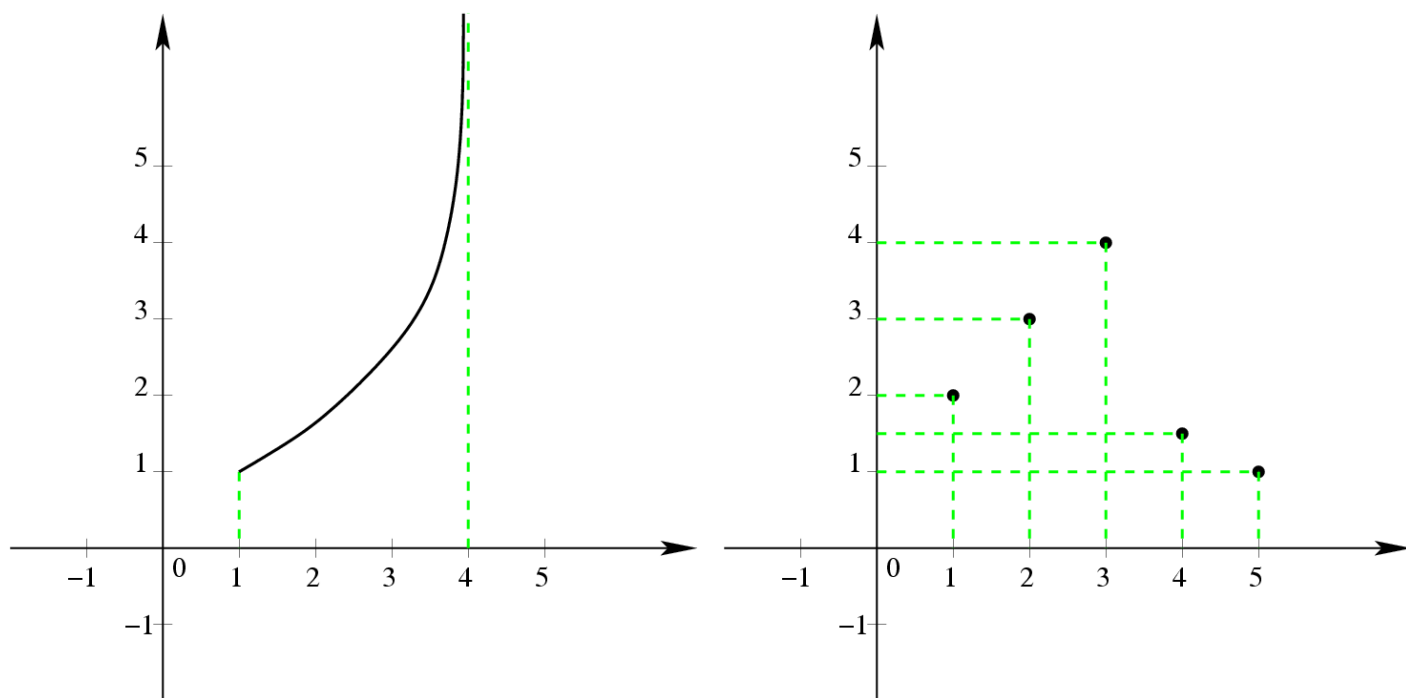
Passons maintenant en revue quelques exemples et contre-exemples de fonctions.

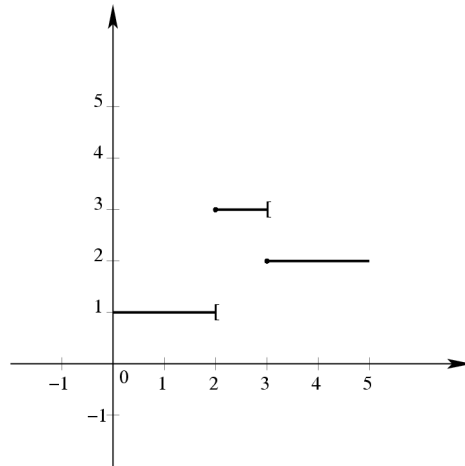
1.4 Exemples et contre-exemples de fonctions

La figure 4 représente le graphe de deux fonctions notées f_1 et f_2 . Le domaine de définition de f_1 est \mathbb{R} tout entier, le domaine de définition de f_2 est $[1, 4]$ et son ensemble de valeurs est $[1, 4]$. A noter que les pointillés présents sont juste là pour aider à comprendre le graphe et ne font pas partie de la fonction.

La figure 5 représente le graphe de deux fonctions notées f_3 et f_4 . Le domaine de définition de f_3 est $[1, 4[$, il ne contient pas 4 car la fonction se rapproche de l'infini à mesure que x se rapproche de 4. L'ensemble de valeurs de f_3 est $[1, +\infty[$. Le domaine de définition de f_4 est 1, 2, 3, 4 et 5, on note cela $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et son ensemble de valeurs est 1, 1.5, 2, 3 et 4, qui sera donc noté $\{1, 1.5, 2, 3, 4\}$. A noter que les points qui définissent la fonction ont une épaisseur sur le graphique pour être visibles mais sont en théorie d'épaisseur nulle.

La figure 6 représente le graphe de la fonction notée f_5 . Le domaine de définition de f_5 est $[0, 5]$ et son ensemble de valeurs est $\{1, 2, 3\}$. Les crochets $[$ et les points qui apparaissent sur le graphique sont là pour bien signaler que la fonction vaut 3 en 2 et 2 en 3 mais là aussi, il ne font pas partie de la fonction.

FIG. 4 – Graphes des fonctions f_1 et f_2 .FIG. 5 – Graphes des fonctions f_3 et f_4 .

FIG. 6 – Graphe de la fonction f_5 .

Voici maintenant trois contre-exemples de fonctions, la figure 7 représente le graphe de trois fonctions dont l'intersection avec plusieurs droites verticales contient deux points. La dernière représente le graphe d'une fonction dont l'intersection avec une droite verticale contient une infinité de points. Il faut garder en mémoire que l'intersection d'un graphe de fonction avec une droite verticale doit contenir **au plus** un point.

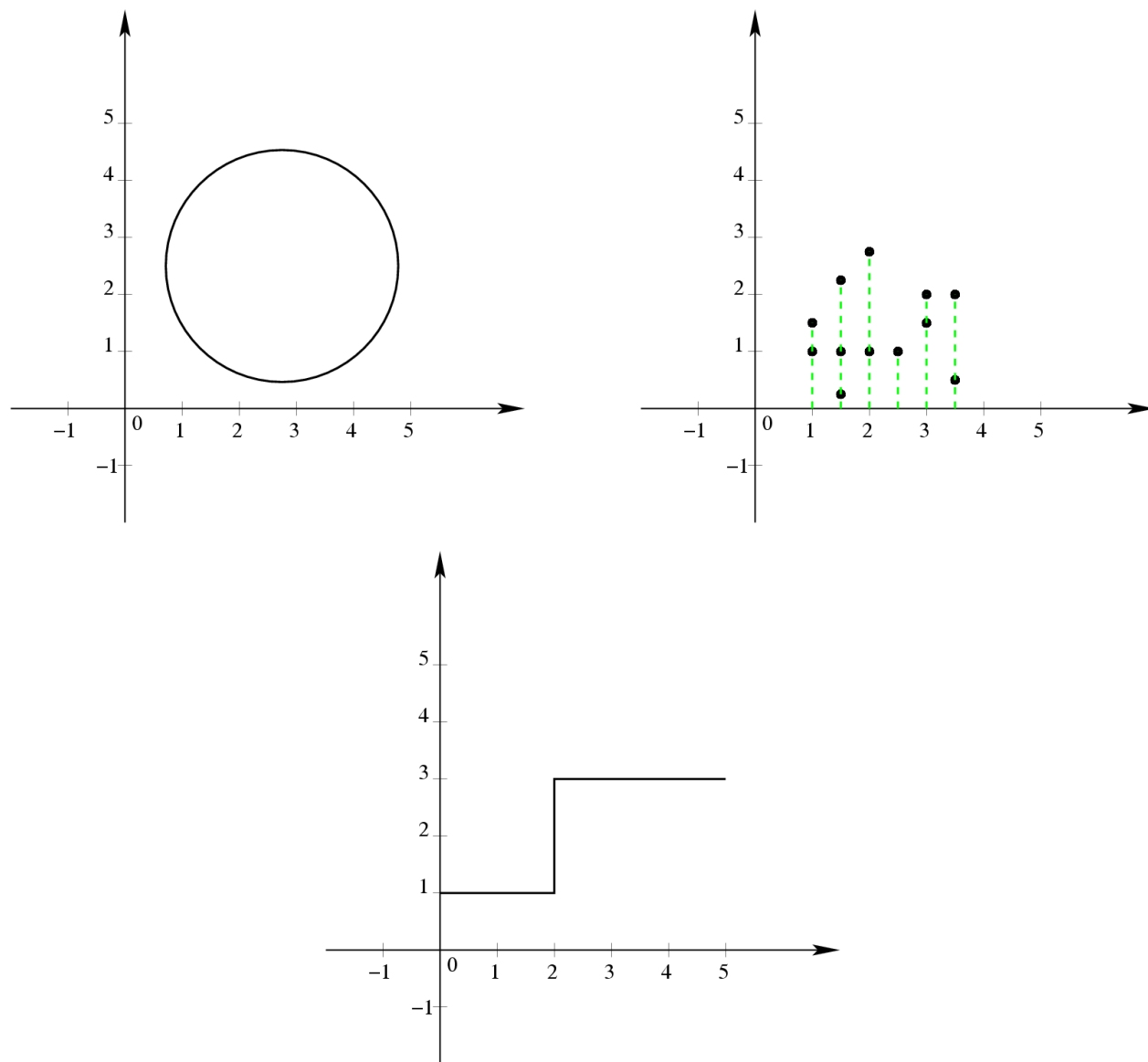


FIG. 7 – Contre-exemples de fonctions.

Une propriété importante d'une fonction est son **sens de variation**, car finalement, si on prend l'exemple de la bourse, ce que l'on observe surtout, ce sont les variations et non la fonction elle-même.

Definition 5 Soit f une fonction d'une variable réelle dont le domaine de définition est D , on dit que f est **croissante** sur une partie A de D si pour tout x_1 et tout x_2 de A avec $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

On dit que f est **décroissante** sur une partie A de D si pour tout x_1 et tout x_2 de A avec $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Enfin, on dit que f est stationnaire (ou constante) sur une partie A de D si pour tout x_1 et tout x_2 de A , on a $f(x_2) = f(x_1)$.

Remarque 3 Quand la fonction est croissante, cette fonction et la variable x varient dans le même sens. Quand la fonction est décroissante, cette fonction et la variable x varient en sens opposé, quand l'une augmente, l'autre diminue.

Remarque 4 En changeant les inégalités larges en inégalités strictes dans la définition de croissance et de décroissance, on obtient la notion de fonction **strictement croissante** et **strictement décroissante**.

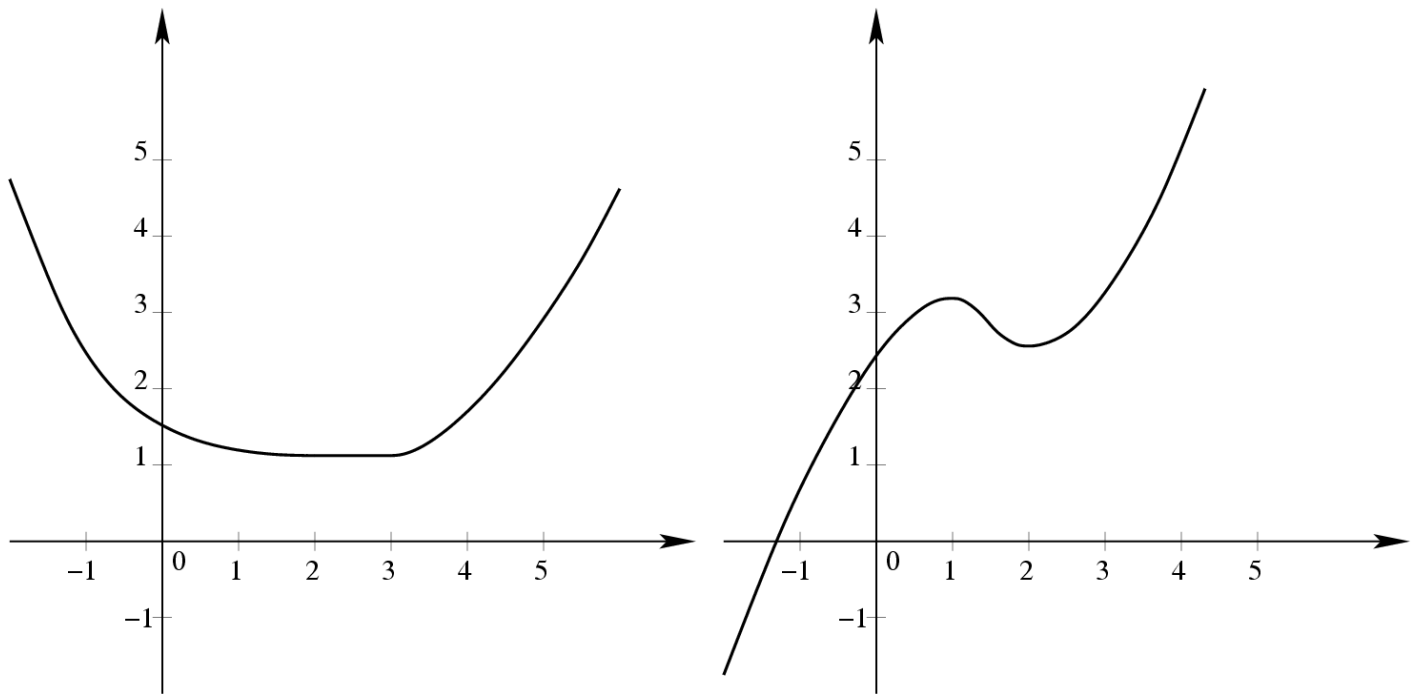


FIG. 8 – Exemples de sens de variation de fonctions.

Donnons deux exemples, la figure 8 représente le graphe de deux fonctions dont le domaine de définition est \mathbb{R} tout entier. La première fonction est croissante sur $[3, +\infty[$, décroissante sur $] - \infty, 2]$ et stationnaire sur $[2, 3]$. La seconde est croissante sur $] - \infty, 1]$ et $[2, +\infty[$, et décroissante sur $[1, 2]$.

Exercice 3 Etudier la croissance stricte ou décroissance stricte de ces deux fonctions.

En économie, on rencontre beaucoup de fonctions croissantes et décroissantes. Par exemple, en micro économie, on considère que l'épargne est une fonction croissante du taux d'intérêt (quand le taux d'intérêt augmente l'épargne augmente) et l'investissement est une fonction décroissante du taux d'intérêt (quand le taux d'intérêt diminue, l'investissement augmente).

Donnons une dernière définition avant de passer en revue quelques fonctions usuelles.

Definition 6 Soit f une fonction d'une variable réelle, si x est dans le domaine de définition de f et si $f(x) = 0$, on dit que x est un zéro de f .

Par exemple, quand on se renseigne sur la température qu'il fait dans une région, on s'intéresse souvent au moment où la température est égale à 0, pour savoir si, déjà, il y a des périodes où les températures sont négatives et ensuite à partir de quand les températures deviennent positives.

La figure 9 représente le graphe d'une fonction qui possède deux zéros qui sont -1 et 5 .

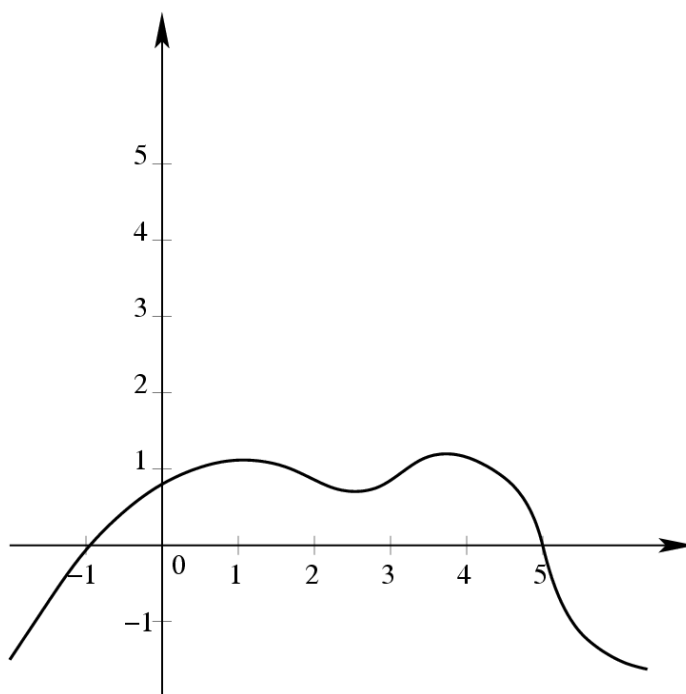


FIG. 9 – Exemple de zéros d'une fonction.

Remarque 5 Un zéro correspond à un point d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des abscisses.

1.5 Quelques fonctions usuelles

1.5.1 Fonctions constantes

Les fonctions constantes sont les plus simples que l'on peut rencontrer, ce sont des fonctions qui prennent toujours la même valeur. Par exemple, si l'on mesure chaque jour la distance qui sépare deux rangs d'un amphithéâtre, cette distance sera toujours égale. Ces fonctions sont stationnaires sur \mathbb{R} tout entier. À part la fonction nulle, ces fonctions n'ont pas de zéros. Deux exemples de fonctions constantes sont représentés sur la figure 10.

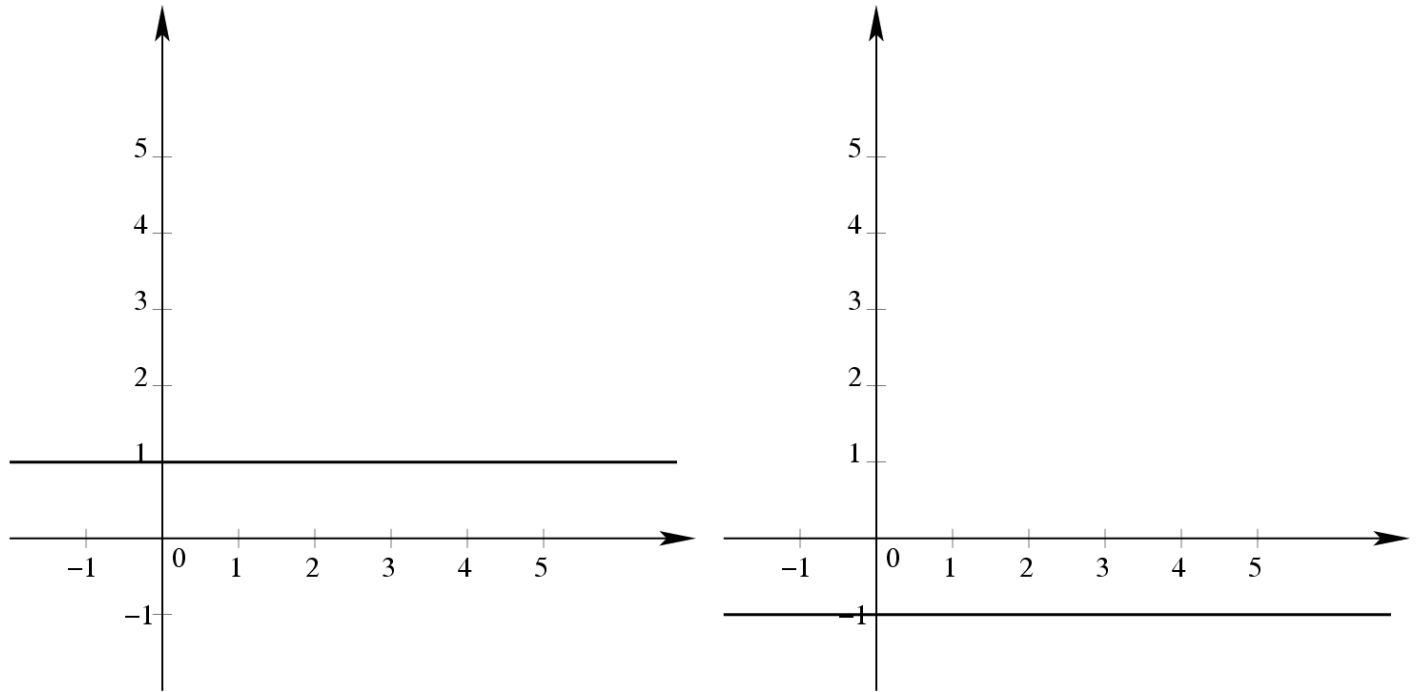


FIG. 10 – Exemple de deux fonctions constantes, l'une valant 1, l'autre -1 .

1.5.2 Fonctions constantes par morceaux

Les fonctions constantes par morceaux sont des fonctions qui sont constantes sur des intervalles, mais la valeur des constantes n'est pas toujours la même.

Voici deux exemples sur la figure 11. La première fonction que nous appellerons f vaut 1 sur $] -\infty, 2[$, 3 sur $[2, 3[$ et 2 sur $[3, +\infty[$. En notation mathématique, on écrit cela sous la forme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2, \\ 3 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

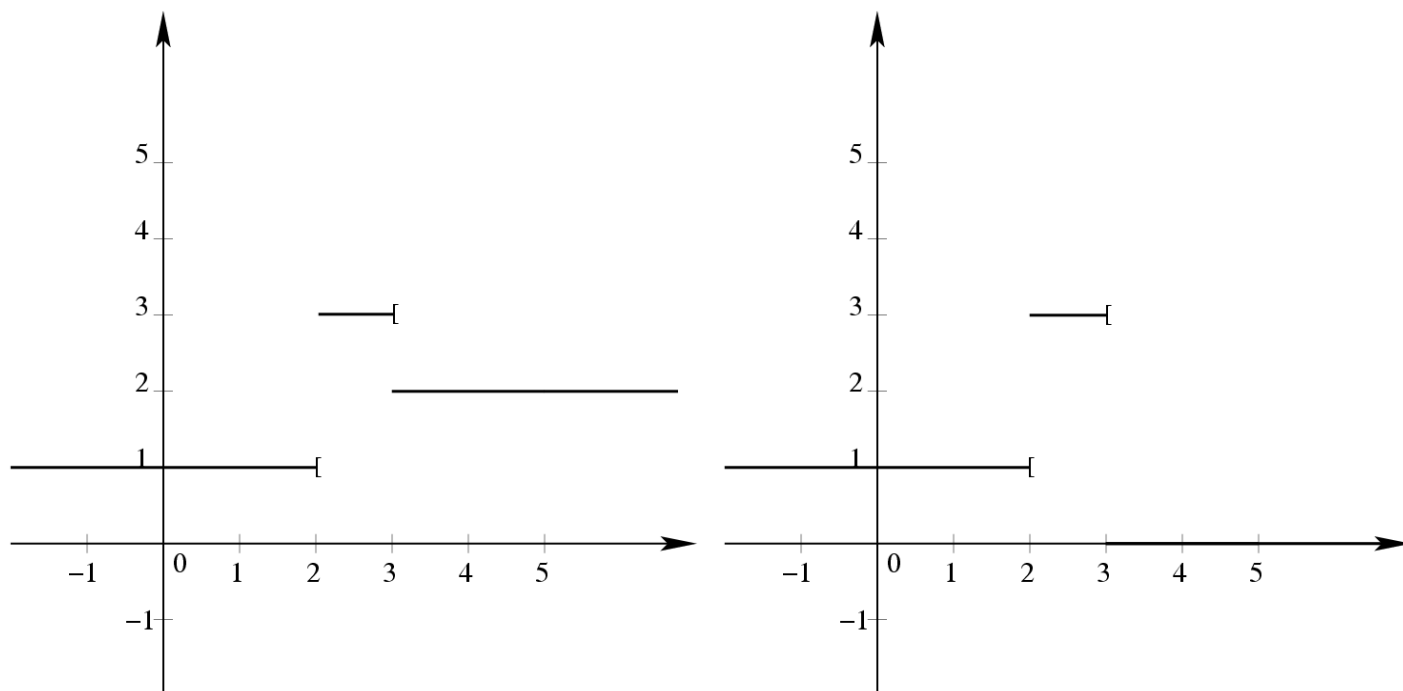


FIG. 11 – Exemple de fonctions constantes par morceaux.

1.5.3 Fonctions linéaires ou affines

Une quantité mesurée est une fonction linéaire d'une autre si elle lui est *proportionnelle*. Par exemple, le prix payé pour l'achat d'une certaine quantité d'un même produit est une fonction linéaire de cette quantité (s'il n'y a pas de tarifs dégressifs). De même, le périmètre p d'un cercle est une fonction linéaire du rayon r puisque $p = 2\pi r$.

Une quantité mesurée est une fonction affine d'une autre quantité si elle est la somme d'une constante et d'une quantité proportionnelle à cette quantité. Par exemple, quand on fait une commande sur internet, des frais de préparation sont souvent ajoutés et il ne dépendent pas du prix de produits que vous avez achetés.

Les fonctions linéaires ou affines sont des polynômes du premier degré de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels. Leur domaine de définition est \mathbb{R} et leur graphe est une **droite**, de *pente* a et d'ordonnée à l'origine b . Si a est égal à 0, on retrouve les fonctions constantes, on supposera donc dans la suite que ce n'est jamais le cas.

On notera que la pente d'une droite d'équation $y = ax + b$ est égale à l'accroissement de la fonction pour un accroissement unitaire de la variable x . En effet, on a $(a(x+1) + b) - (ax + b) = a$, comme on peut le voir sur la figure 12.

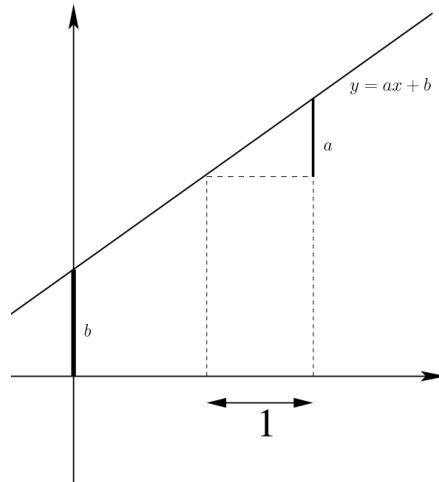


FIG. 12 – Exemple d’une droite.

Lorsque la pente est positive, la fonction est croissante sur \mathbb{R} . Lorsqu’elle est négative, la fonction est décroissante sur \mathbb{R} . Ces deux cas de figures sont représentés sur la figure 13.

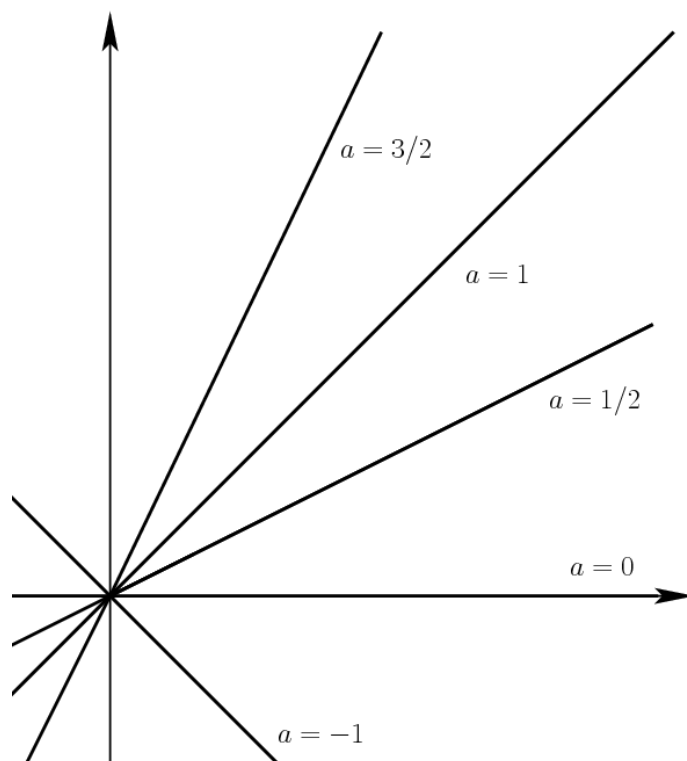
Pour représenter une droite il suffit de connaître deux points par lesquels elle passe. On cherche le plus souvent les coordonnées des points d’intersection avec les axes de coordonnées, l’intersection avec l’axe des ordonnées se trouve en posant $x = 0$ et celle avec l’axe des abscisses en cherchant x tel que $ax + b = 0$. On trouve donc les points $(0, b)$ et $(-b/a, 0)$. On remarque enfin, toujours en supposant que a est différent de 0 que l’ensemble des valeurs est \mathbb{R} tout entier.

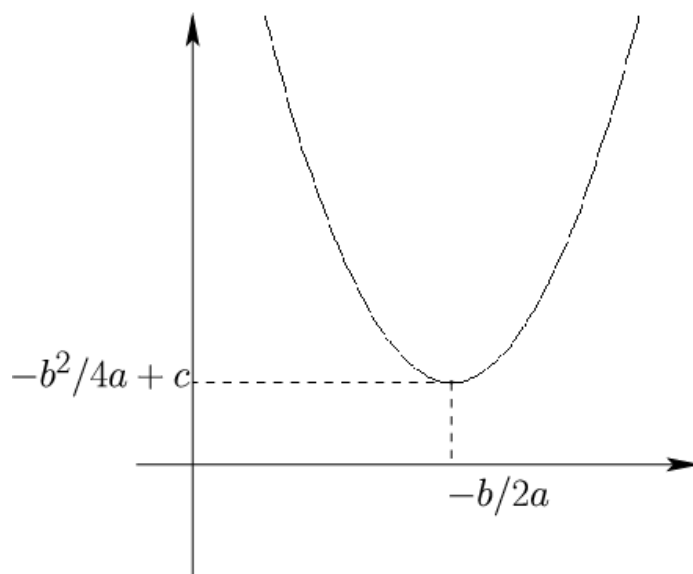
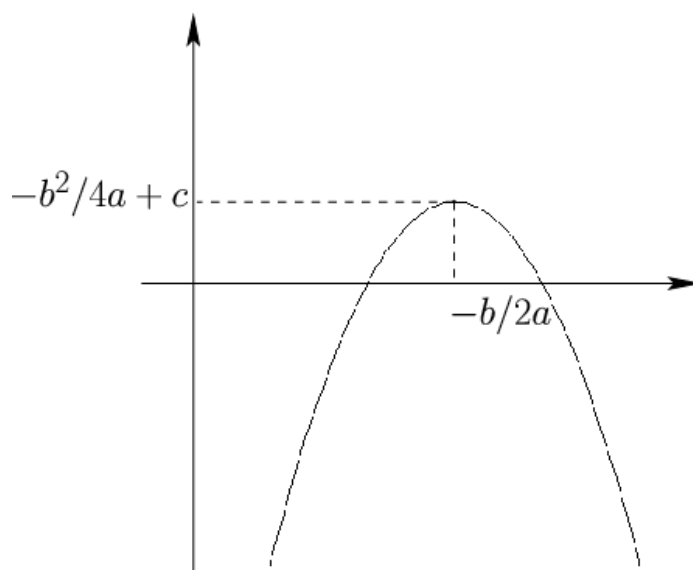
1.5.4 Fonctions quadratiques

Les fonctions quadratiques sont des polynômes du deuxième degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels donnés. Si a est égal à 0, on retrouve les fonctions affines, on supposera donc, pour la suite, que a est différent de 0. Par exemple, la fonction qui à x associe $f(x) = x^2$ est une fonction quadratique, car, dans ce cas, $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$, ainsi que la fonction qui à x associe $f(x) = 3x^2 + x - 1$, car, dans ce cas, $a = 3$, $b = 1$ et $c = -1$.

Les fonctions quadratiques ont pour graphes des **paraboles** qui sont “ouvertes” vers le haut si a est positif et vers le bas si a est négatif. Dans le cas où a est strictement positif, la fonction est représentée sur la figure 14. Elle est décroissante sur $] -\infty, -b/2a]$, croissante sur $[-b/2a, +\infty[$. Un point important est donc le point $(-b/2a, -b^2/4a + c)$, la valeur $-b^2/4a + c$ étant obtenue en prenant $x = -b/2a$. L’ensemble des valeurs de la fonction est $[-b^2/4a + c, +\infty[$.

Dans le cas où a est strictement négatif, la fonction est représentée sur la figure 15. Elle est croissante sur $] -\infty, -b/2a]$, décroissante sur $[-b/2a, +\infty[$. L’ensemble des valeurs de la fonction est $] -\infty, -b^2/4a + c]$.

FIG. 13 – Exemple de droites pour différentes valeurs de a et $b = 0$.

FIG. 14 – Exemple d'une parabole avec $a > 0$.FIG. 15 – Exemple d'une parabole avec $a < 0$.

Remarque 6 Vous avez déjà rencontré le terme *parabole* en parlant d'*antenne parabolique*. Comme nous le verrons plus loin, une coupe d'*antenne parabolique* a pour forme une *parabole*, cette propriété permet aux ondes réfléchies de se concentrer au centre pour récolter un *maximum d'énergie*.

Nous allons maintenant déterminer les zéros de ces fonctions que l'on appelle souvent des racines. D'après les deux figures précédentes, ces racines peuvent exister ou ne pas exister.

Definition 7 On appelle *discriminant* le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Par exemple pour la fonction qui à x associe $f(x) = x^2 + x + 1$, on a $\Delta = 1 - 4 = -3$. Pour

la fonction qui à x associe $f(x) = -x^2 - 3x + 1$, on a $\Delta = 9 + 4 = 13$.

Si Δ est strictement positif, la fonction possède deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$, on a $x_1 = x_2$, la fonction possède une seule racine $x_1 = -b/2a$.

Si Δ est strictement négatif, la fonction ne possède pas de racines.

Donnons quelques exemples : Pour la fonction qui à x associe $f(x) = x^2 - 3x - 2$, on a

$$\Delta = 9 + 8 = 17 > 0,$$

cette fonction possède donc deux racines données par

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Pour la fonction qui à x associe $f(x) = x^2 - 2x + 1$, on a

$$\Delta = 4 - 4 = 0,$$

on a donc une seule racine qui est $x_1 = 1$.

Remarque 7 Comme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, on retrouve bien qu'il y a exactement une racine.

Pour la fonction qui à x associe $f(x) = x^2 + x + 1$, on a

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0,$$

la fonction n'a aucune racine.

Terminons en traitant un exemple complet, nous allons représenter la fonction qui à x associe $f_1(x) = x^2 - 4x + 1$. Tout d'abord, il s'agit d'une parabole "ouverte" vers le haut. Comme dans ce cas, $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$, f_1 est décroissante sur $] -\infty, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$. Le point où la fonction change de sens de variation est $(2, -3)$. L'ensemble des valeurs de la fonction est $[-3, +\infty[$. Cherchons enfin ses racines, le discriminant est égal à 12 qui est strictement positif, on a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

et

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

On a souvent l'habitude de représenter les valeurs significatives de la fonction sous forme d'un tableau, on place en haut la variable x et, en bas, les valeurs de la fonction. Dans notre exemple, on écrira donc :

x	0	$2 - \sqrt{3}$	2	$2 + \sqrt{3}$
$f_1(x)$	1	0	-3	0

Nous avons ajouté la valeur prise quand x est égal à 0 car c'est une valeur très simple à calculer et nous connaissons ainsi l'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des ordonnées, ainsi qu'avec l'axe des abscisses puisque nous avons calculé les racines. Le graphe de f_1 est représenté sur la figure 16.

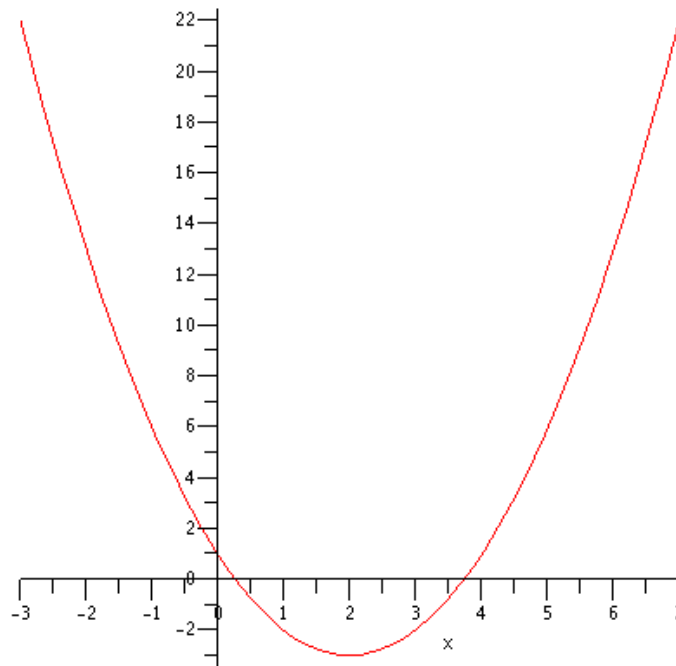


FIG. 16 – Graphe de la fonction f_1 .

1.5.5 Polynômes de degré quelconque

Soit n un entier naturel strictement positif, on peut considérer de manière générale une fonction de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^n a_{n-j} x^{n-j},$$

où a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sont des nombres réels. Si a_n est non nul, on parle d'un polynôme de degré n . Ce polynôme se comporte quand x est grand, en valeur absolue, comme $a_n x^n$ son monôme de plus haut degré. Par exemple, quand a_n est strictement positif et que n est pair, le polynôme tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$. Quand a_n est strictement positif et que n est impair, le polynôme tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

À titre d'exemples, on a représenté sur la figure 17, le graphe des fonctions qui à x associent $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ et $x^5/5 - x^3/3 + x$.

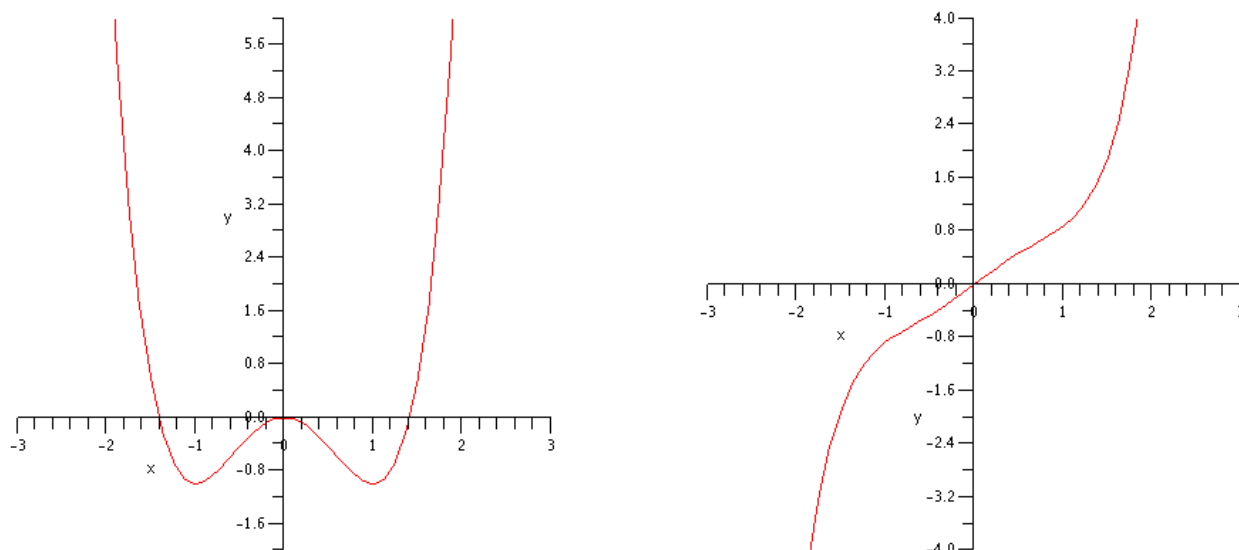


FIG. 17 – Deux exemples de polynômes.

Remarque 8 Si nous revenons à l'ensemble \mathbb{R} , nous avons vu que les nombres réels sont constitués des nombres rationnels et des nombres irrationnels, nous allons voir que dans les nombres irrationnels, nous en avons deux types : les nombres algébriques et les nombres transcendants. Si la notion de nombre irrationnel remonte aux Grecs, l'idée de nombre transcendant n'a pu se dégager qu'après que le concept de polynôme de degré quelconque puisse être clairement formulé. En effet, on appellera nombre algébrique un nombre qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers, les autres nombres réels étant qualifiés de transcendants. C'est seulement au XVII^e siècle que l'on a commencé à faire cette distinction. Un nombre transcendant célèbre est le nombre π . La question du caractère transcendant de π est liée à ce que l'on appelle la quadrature du cercle. La quadrature du cercle correspond au problème suivant : Peut-on construire un carré et un cercle de même aire avec une règle et un compas ? Ce problème est très vieux puisque Aristophane (vers 444 - 380 av. J.-C.) s'était déjà posé la

question. En 1882, Lindemann a démontré que π est transcendant, il ne peut donc être racine d'un polynôme à coefficients entiers. Or, comme tout nombre construit à l'aide du compas et de la règle est un nombre algébrique, la quadrature du cercle est donc impossible.

1.5.6 Fonctions quotients

Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle, on appelle quotient de f par g , la fonction f/g . Pour pouvoir définir correctement cette fonction, il faut tout d'abord choisir x dans le domaine de définition de f (pour pouvoir parler de $f(x)$) et dans le domaine de définition de g (pour pouvoir parler de $g(x)$), ensuite il faut s'assurer que x n'est pas un zéro de g car on ne peut pas diviser par 0. Le domaine de définition de f/g est donc l'ensemble des x appartenant au domaine de définition de f et au domaine de définition de g tels que $g(x) \neq 0$.

Si f et g sont des polynômes, f/g est appelée "fraction rationnelle", si f et g sont des fonctions affines, f/g est appelée "fonction homographique".

Une fonction homographique est donc de la forme

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

où a, b, c et d sont des nombres réels. Dans ce cas, le domaine de définition de h est simplement l'ensemble des x tels que $cx + d \neq 0$. Si $c \neq 0$, il s'agit donc de $x \neq -d/c$ et si $c = 0$, en supposant alors que $d \neq 0$ sinon la fonction n'est jamais définie, il s'agit de \mathbb{R} tout entier.

Nous allons supposer pour la suite que $c \neq 0$, dans le cadre général, les variations des fonctions homographiques dépendent du signe de $ad - bc$. Si $ad - bc$ est strictement positif, la fonction est croissante sur $] -\infty, -d/c[$ et $] -d/c, +\infty[$. Son graphe est constitué de deux branches, la première branche s'approche de la droite d'équation $y = a/c$ en $-\infty$ et de la droite d'équation $x = -d/c$ en $-d/c$. La deuxième s'approche de la droite d'équation $y = a/c$ en $+\infty$ et de la droite d'équation $x = -d/c$ en $-d/c$.

Si $ad - bc$ est strictement négatif, la fonction est décroissante sur $] -\infty, -d/c[$ et $] -d/c, +\infty[$. Son graphe est constitué de deux branches, la première branche s'approche de la droite d'équation $y = a/c$ en $-\infty$ et de la droite d'équation $x = -d/c$ en $-d/c$. La deuxième s'approche de la droite d'équation $y = a/c$ en $+\infty$ et de la droite d'équation $x = -d/c$ en $-d/c$.

On peut trouver sur la figure 18 deux exemples avec

$$h_1(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$$

et

$$h_2(x) = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Remarque 9 *Quand on dessine le graphe d'une fonction homographique, il faut lever le crayon pour passer d'une branche à l'autre, c'est une conséquence de ce que l'on appelle une discontinuité de la fonction en $-d/c$.*

Exercice 4 *Que se passe-t-il quand $ad - bc = 0$?*

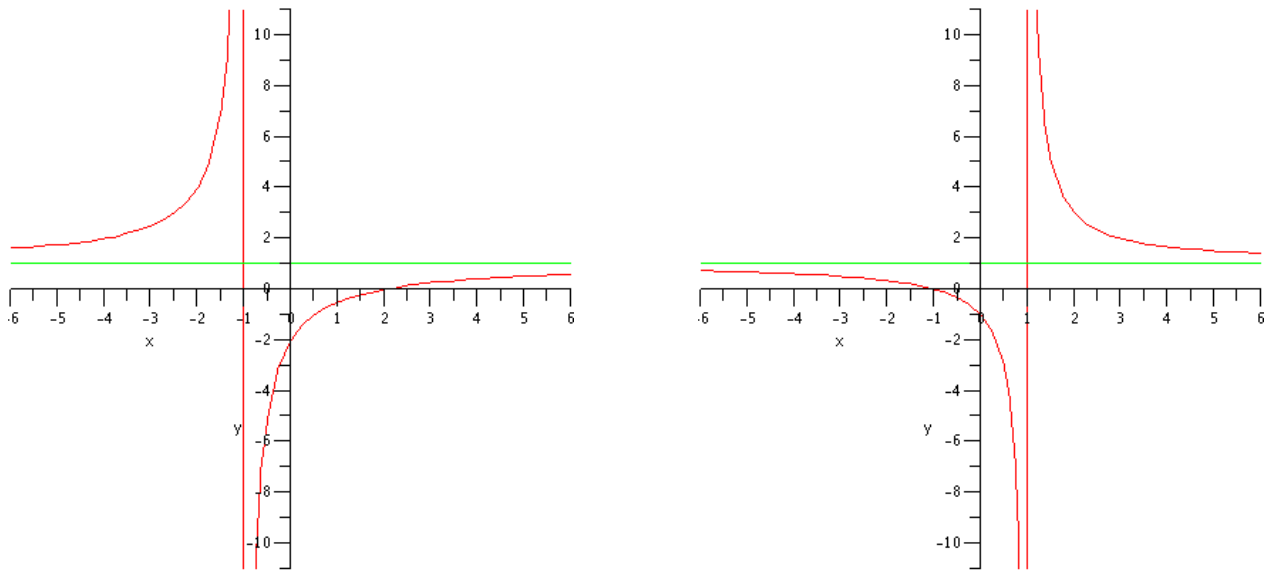


FIG. 18 – Deux exemples de fonctions homographiques.

1.6 Notion d'une fonction numérique de deux variables réelles

Jusqu'ici nous avons parlé de fonctions d'une seule variable, malheureusement cette notion n'est pas suffisante dans de nombreux cas. Par exemple, le bénéfice d'une entreprise qui produit deux biens X et Y dépend des quantités vendues x et y de chacun de ces deux biens. Nous devons donc généraliser ce que nous venons de voir et parler de fonctions de deux variables réelles dont voici la définition.

Definition 8 Une fonction numérique f de deux variables réelles x et y est une relation qui à chaque valeur du couple (x, y) associe **au plus** une valeur $f(x, y)$.

Par exemple, la surface d'un rectangle S est une fonction de la longueur L et de la largeur ℓ du rectangle puisque $S = L \times \ell$.

A une fonction numérique de deux variables réelles est associé la notion de domaine de définition dont voici la définition :

Definition 9 L'ensemble des couples de nombres réels (x, y) auxquels correspond une valeur $f(x, y)$ est le **domaine de définition** de f , c'est une partie bornée ou non bornée du plan Oxy .

Une fois défini le domaine de définition de la fonction, nous pouvons parler de la représentation graphique de cette fonction en introduisant la notion de graphe :

Definition 10 Le graphe d'une fonction numérique f de deux variables réelles x et y est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ lorsque le couple (x, y) varie sur le domaine de définition de la fonction f . C'est en général ce que l'on appelle une **surface**.

Avant de donner plusieurs exemples, donnons encore une définition qui généralise le cas des fonctions d'une variable réelle.

Definition 11 *L'ensemble des valeurs $f(x, y)$ prises par la fonction quand le couple (x, y) varie sur le domaine de définition de f est l'ensemble des valeurs de f .*

Passons maintenant en revue quelques exemples et contre-exemples de fonctions de deux variables réelles.

1.7 Exemples et contre-exemples de fonctions de deux variables réelles

La figure 19 représente le graphe d'une fonction et son domaine de définition dans le plan Oxy .

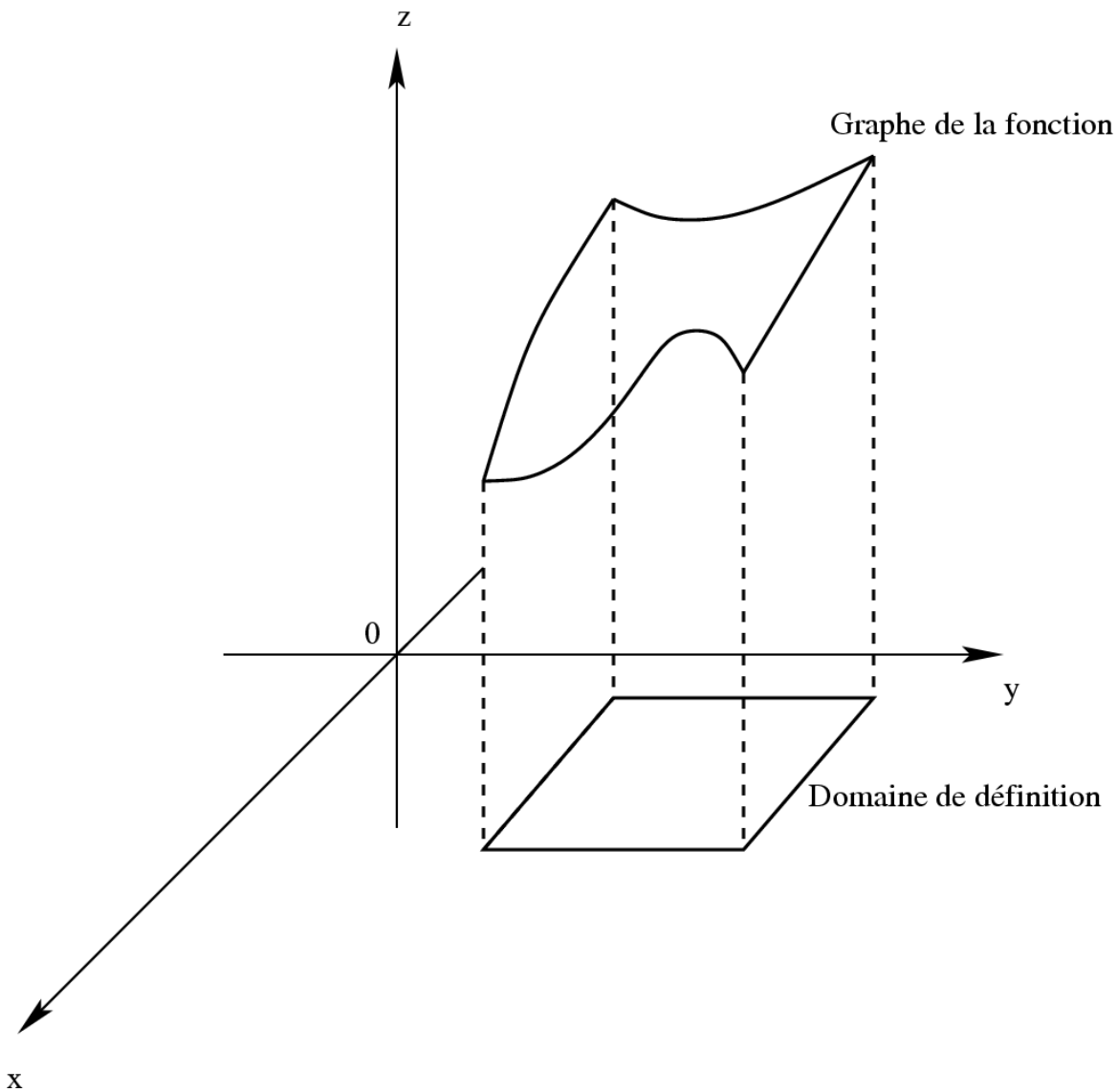


FIG. 19 – Exemple de graphe d'une fonction.

La figure 20 représente le graphe de deux fonctions, le premier graphe est celui d'un plan, le domaine de définition est le plan Oxy tout entier, on note souvent cela \mathbb{R}^2 car il s'agit en fait de tous les couples (x, y) pour x variant dans \mathbb{R} et y variant dans \mathbb{R} . L'ensemble des valeurs est \mathbb{R} . La seconde fonction est la fonction qui à (x, y) associe $f_2(x, y) = x^2 + y^2$, son domaine de définition est \mathbb{R}^2 , son graphe est un parabolôïde et l'ensemble de ses valeurs est $[0, +\infty[$. Une partie du graphe correspond à la forme d'une antenne parabolique, ce dont nous avons déjà parlé précédemment.

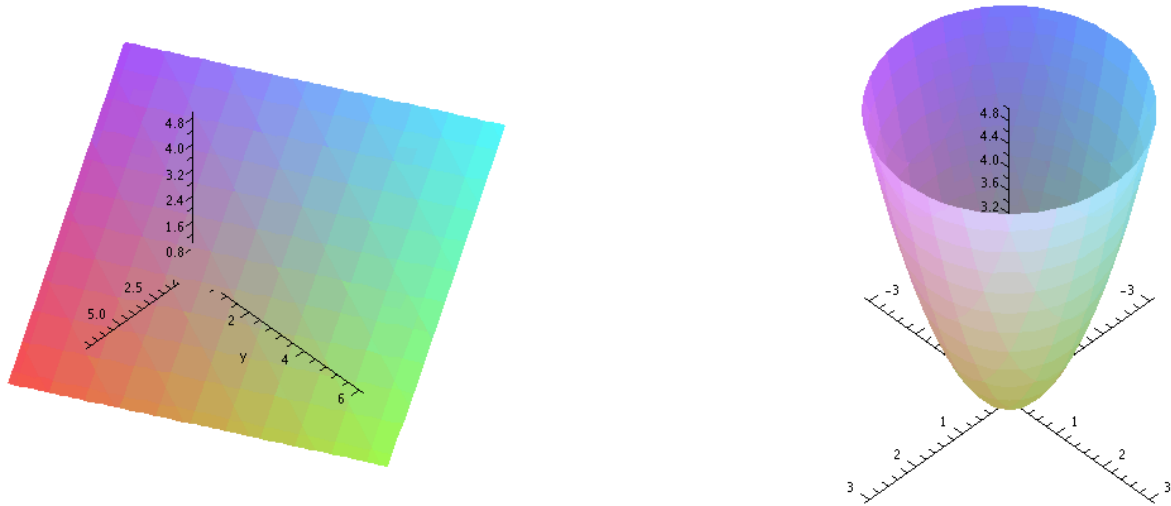


FIG. 20 – Graphe des fonctions f_1 et f_2 .

Terminons par un contre-exemple, comme on peut le voir sur la figure 21, la sphère est une surface qui n'est pas le graphe d'une fonction car l'intersection d'un graphe d'une fonction avec une droite verticale ne doit pas contenir plus d'un point.

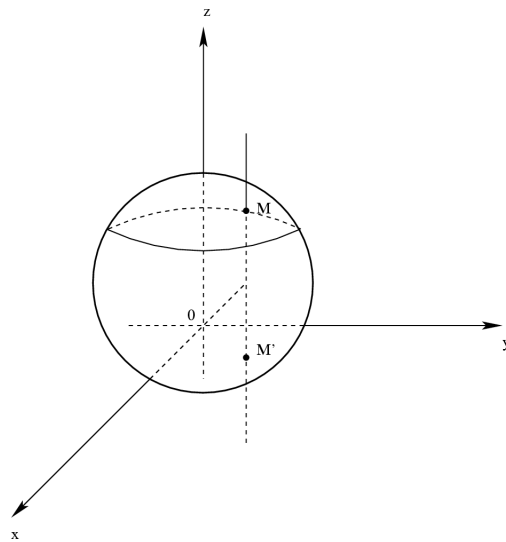


FIG. 21 – Contre-exemple d'une fonction.

1.7.1 Courbes de niveau

Au lieu de représenter le graphe d'une fonction de deux variables dans l'espace, on préfère parfois représenter dans le plan les courbes de niveau, ou lignes de niveau. C'est le principe utilisé, par exemple, pour les cartes de randonnées type IGN (Institut Géographique Nationale).

Definition 12 *Une courbe de niveau d'une fonction qui à (x, y) associe $f(x, y)$ est une courbe d'équation $f(x, y) = z_0$, où z_0 est une constante fixée. Si z_0 n'appartient pas à l'ensemble des valeurs de f , la courbe de niveau z_0 est vide. Sinon la courbe de niveau z_0 est une partie non vide du domaine de définition de f .*

Sur une courbe de niveau, la fonction garde une valeur constante, ceci explique le nom qu'elles prennent en économie :

- courbes d'indifférence lorsque la fonction considérée est l'utilité d'un consommateur, rappelons que l'utilité est une manière de représenter les préférences des consommateurs de manière abstraite,
- isoquantes (ou courbes d'isoproduction) lorsque la fonction considérée est la fonction de production, que l'on représente souvent comme une fonction du capital (stock de capital) et du travail (services du travail),
- courbes d'isocoût lorsque la fonction considérée est le coût,...

Donnons maintenant quelques exemples de fonctions de deux variables parmi les plus utilisées.

1.8 Quelques fonctions usuelles

1.8.1 Fonctions linéaires ou affines

Les fonctions linéaires ou affines de deux variables sont de la forme suivante $f(x, y) = ax + by + c$, où a , b et c sont des nombres réels donnés. Elles ont pour graphe un **plan**. Pour repérer la position de ce plan dans l'espace, on peut par exemple calculer les coordonnées des trois points d'intersection du plan avec les axes de coordonnées quand ils existent ; si a et b sont non nuls, le plan d'équation $z = ax + by + c$ coupe l'axe des abscisses en $(-c/a, 0, 0)$, l'axe des ordonnées en $(0, -c/b, 0)$, l'axe des cotes en $(0, 0, c)$. L'exemple du plan d'équation $z = -x - y + 1$ est présenté sur la figure 22.

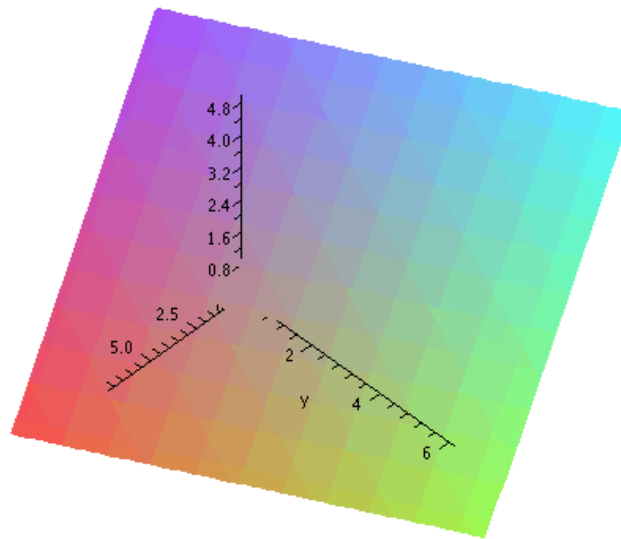
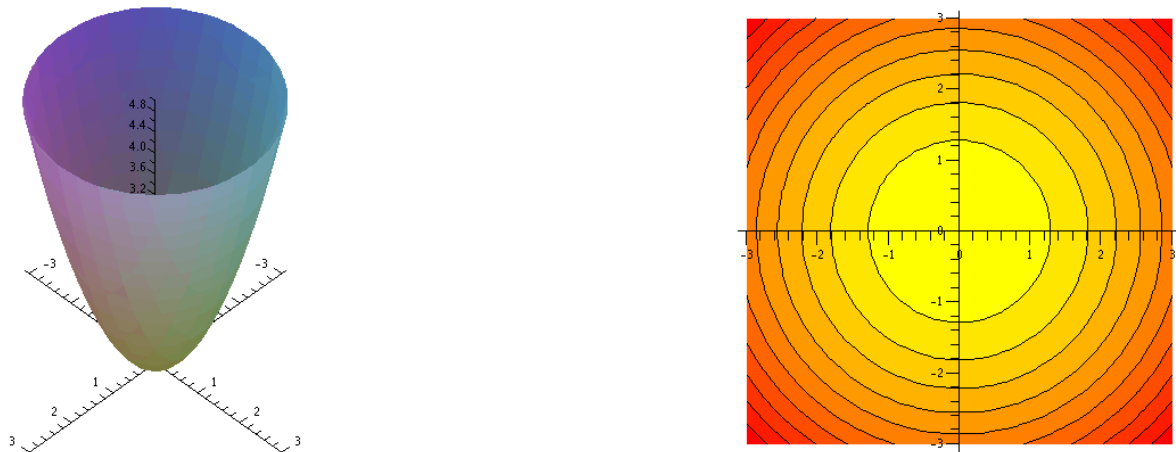


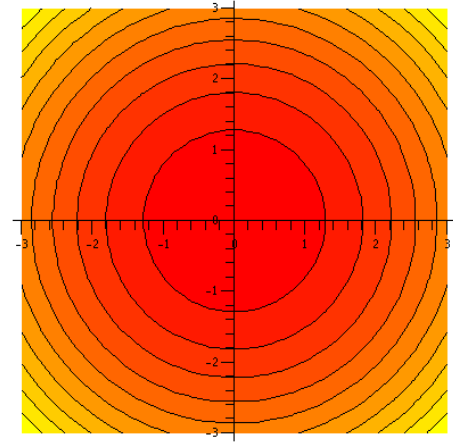
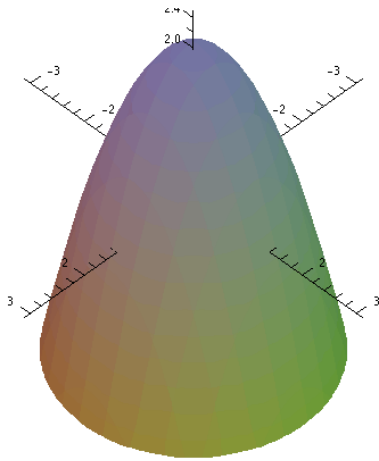
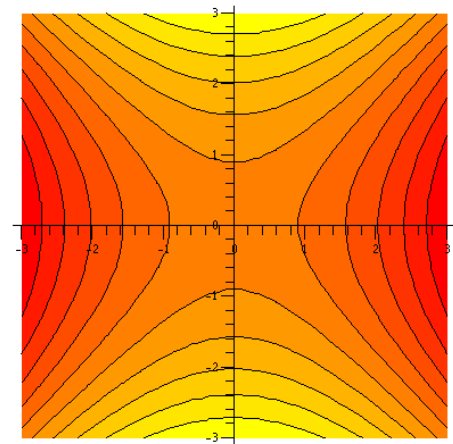
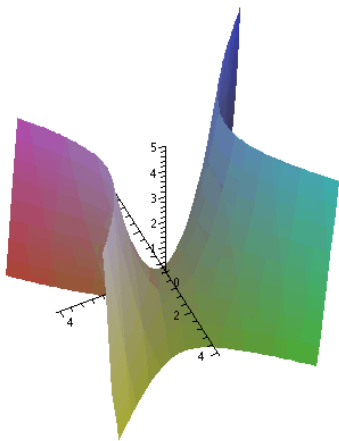
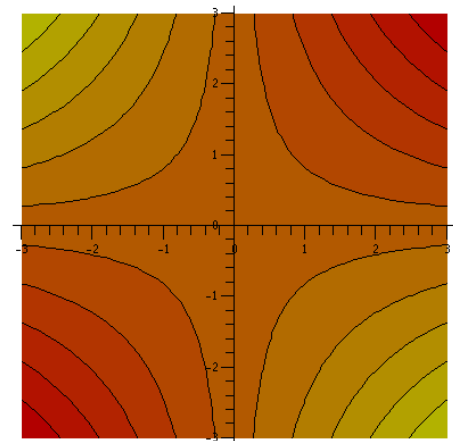
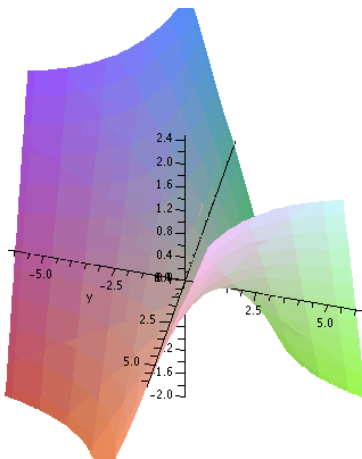
FIG. 22 – Exemple d’un plan.

1.8.2 Fonctions quadratiques

Les fonctions quadratiques sont des polynômes de degré 2, à deux variables, donc de la forme $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f_0$, où a, b, c, d, e et f_0 sont des nombres réels donnés. Leur graphe est de deux types : soit des paraboloides “ouverts” vers le haut si a et c sont strictement positifs ou vers le bas si a et c sont strictement négatifs, soit une surface que l’on appelle **selle** à cause de sa forme en “selle de cheval” si, par exemple, a et c sont de signe contraire. On parle aussi parfois de **col** si on veut utiliser un langage plus topographique.

Voici maintenant quatre exemples, à titre d’exercice, on pourra essayer d’expliquer la forme des courbes de niveau. Des couleurs ont été ajoutées, le rouge correspond aux courbes de niveau avec z “grand”, le jaune aux courbes de niveau avec z “petit”.

FIG. 23 – Graphe et courbes de niveau de $z = x^2 + y^2$.

FIG. 24 – Graphe et courbes de niveau de $z = 2 - x^2 - y^2$.FIG. 25 – Graphe et courbes de niveau de $z = x^2 - y^2$.FIG. 26 – Graphe et courbes de niveau de $z = xy/5$.

1.8.3 Fonctions puissances du type $x^a y^b$

Soient a et b deux réels positifs, les fonctions qui à (x, y) associe $f(x, y) = x^a y^b$ jouent un rôle important en économie, on les appelle fonctions de Cobb-Douglas. Elles servent à modéliser la fonction de production qui exprime la relation entre les entrants d'une entreprise et sa production, $f(x, y)$ est la quantité de biens produits avec un volume d'heures de travail égal à x et un volume d'équipements y . Ces fonctions ont été proposées et testées économétriquement par l'économiste américain Paul Douglas et le mathématicien américain Richard Cobb en 1928.

On les étudie pour x et y positifs. Les figures 27, 28 et 29 représentent plusieurs exemples selon que $a + b$ est plus petit, égal ou plus grand que 1.

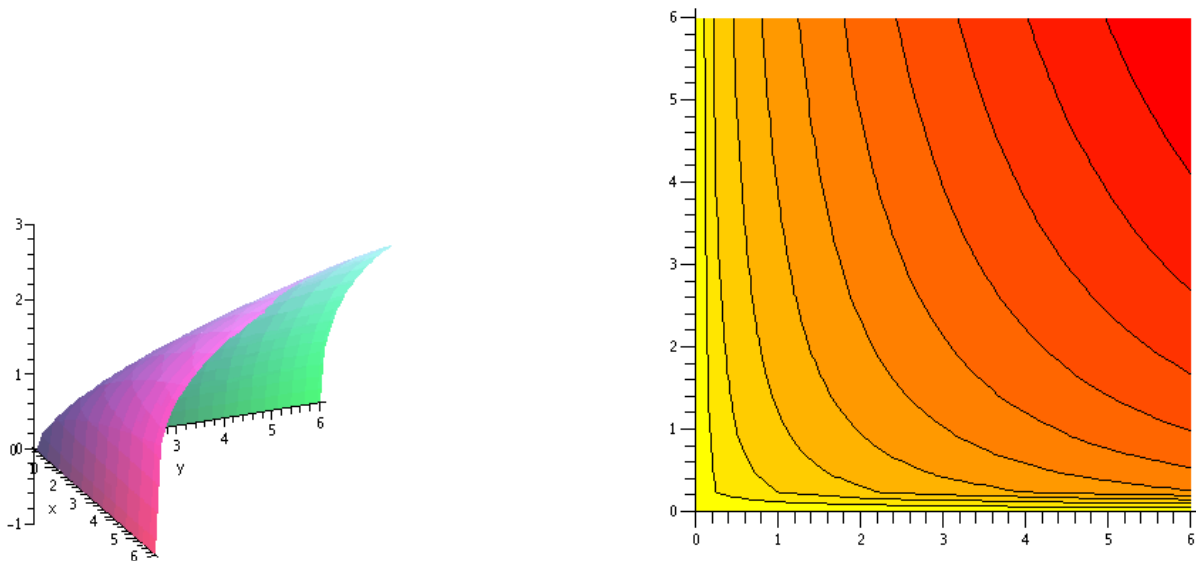
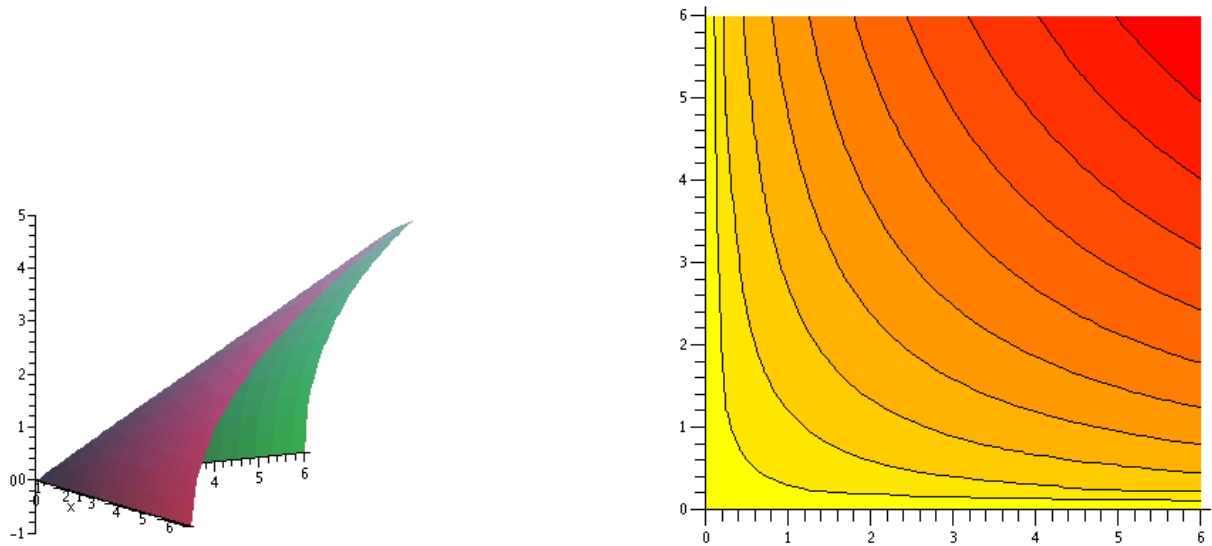
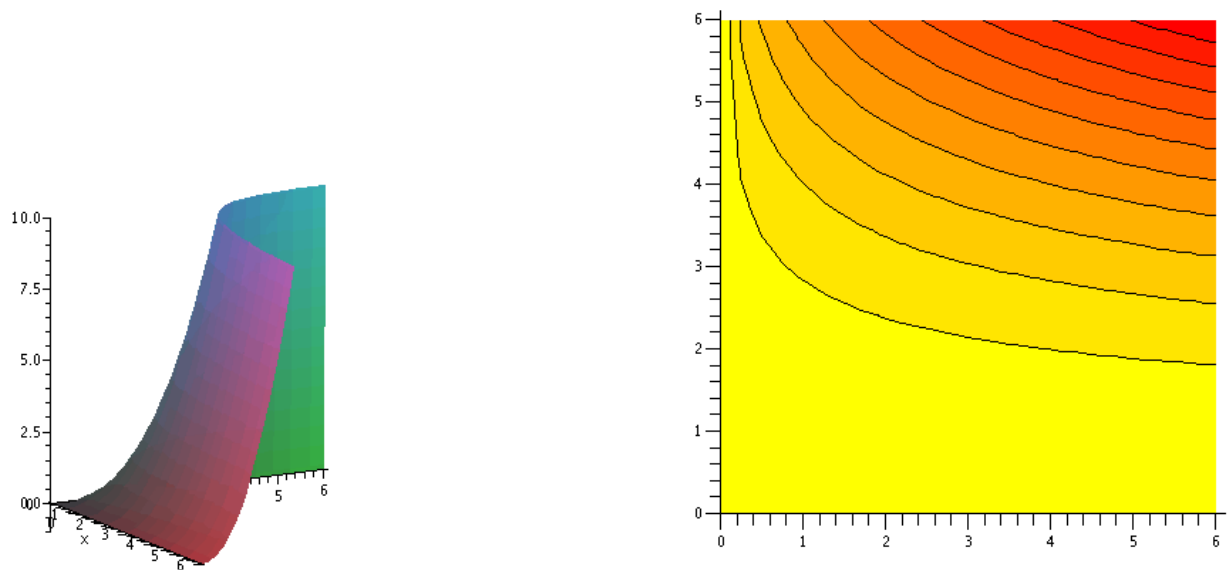


FIG. 27 – Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2$, $b = 1/4$.

FIG. 28 – Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2$ et $b = 1/2$.FIG. 29 – Graphe et courbes de niveau pour $a = 1/2$ et $b = 2$.

Chapitre 2

Dérivées et dérivées partielles

2.1 Définition de la dérivée dans le cas d'une variable

La notion de dérivée d'une fonction est une notion très familière (vitesse d'un véhicule, taux de croissance d'une population,...) et sa formalisation mathématique, qui remonte au 17ème siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton, est de celle qui a rendu les plus grands services. La dérivée d'une fonction est simplement la limite de son taux de variation ; pour l'économiste, elle formalise la notion de **valeur marginale** de la fonction, c'est-à-dire, en première approximation, la variation de la fonction résultant d'un accroissement unitaire de la variable.

Definition 13 Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs réelles. Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de f entre les points a et b de I est le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 10 La pente de la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est égale à $(f(b) - f(a))/(b - a)$, c'est-à-dire au taux de variation de f entre a et b .

Definition 14 Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Soit x_0 un nombre réel appartenant à $[a, b]$ et différent de a et b , on appelle dérivée de f au point x_0 , si elle existe, la limite du taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ lorsque h tend vers 0. On la note $f'(x_0)$, on a donc

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Par exemple, on peut vérifier que la dérivée au point $x_0 = 1$ de la fonction qui à x associe $f(x) = 2x^2 - 3$ est égale à 4. En effet, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(1+h)^2 - 3) - (2(1)^2 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 - 3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4.$$

Donnons maintenant une définition plus géométrique de la dérivée en un point. Nous allons parler de tangente, tangente vient du latin *tangere*, qui veut dire toucher, par définition, la tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui «touche» la courbe au plus près autour de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point.

Definition 15 (géométrique) *La dérivée d'une fonction f au point x_0 est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.*

On peut donc maintenant trouver facilement l'équation de la tangente en un point $(x_0, f(x_0))$ puisque c'est une droite de pente $f'(x_0)$ passant par le précédent point, on obtient

$$y = f'(x_0)x + (f(x_0) - x_0f'(x_0)) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nous avons donc vu qu'il est possible de calculer, quand elle existe, $f'(x_0)$, la dérivée de f au point x_0 . On vient donc de définir une nouvelle fonction qui à x associe $f'(x)$, que l'on appelle dérivée de f .

2.1.1 Contre-exemples de fonctions dérivables en un point

Une fonction n'est pas nécessairement dérivable en tout point où elle est définie. Pour qu'elle soit dérivable en x_0 , il est nécessaire que son graphe soit suffisamment "lisse" pour posséder une tangente au point d'abscisse x_0 . Voici quelques exemples de fonctions non dérivables en un point : dans la figure 1 sont représentés deux graphes. Celui de la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

et celui de la fonction valeur absolue que nous appellerons f_2 . Dans le premier cas, comme nous allons le montrer, la fonction n'est pas dérivable en $x_0 = 1$. Elle possède même une discontinuité. En effet, si h est tel que $x_0 + h = 1 + h < 1$, on a

$$\frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} = \frac{1 - 2}{h} = -\frac{1}{h},$$

si h est tel que $1 + h > 1$, on a

$$\frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} = \frac{2 - 2}{h} = 0.$$

Quand h tend vers 0, la limite est différente selon que h est positif ou négatif, la fonction n'est donc pas dérivable en 1.

Dans le second cas, la fonction n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ et possède deux demi-tangentes non alignées en ce point. En effet, quand h est négatif, on a

$$\frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1$$

et si h est positif, on a

$$\frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Quand h tend vers 0, la limite est différente selon que h est positif ou négatif, la fonction n'est donc pas dérivable en 0.

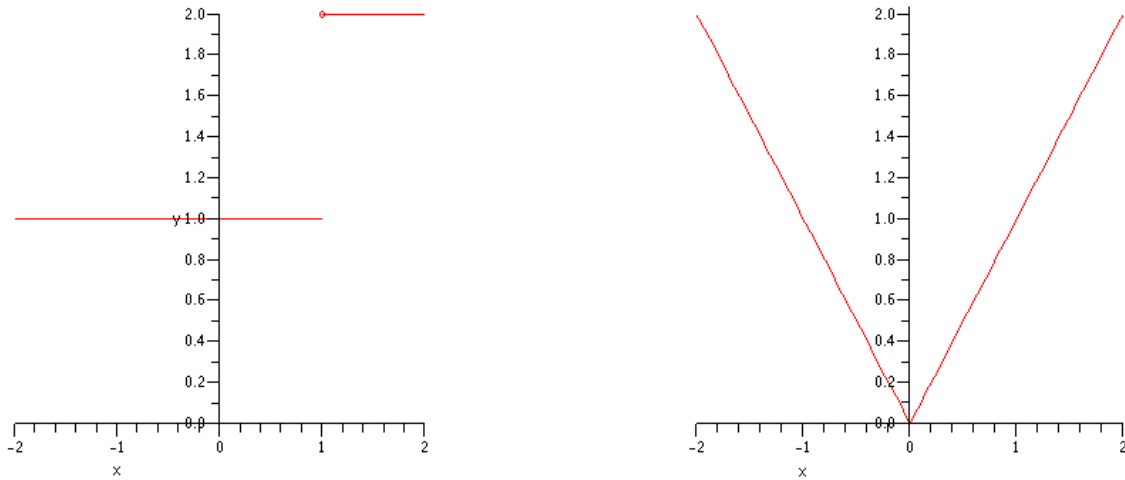


FIG. 1 – Exemples de fonctions non dérivables en un point.

Le dernier exemple est celui de la fonction racine carrée, qui est définie seulement sur $[0, +\infty[$. Elle n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ car sinon elle aurait pour tangente une droite de pente infinie. En effet, on a

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

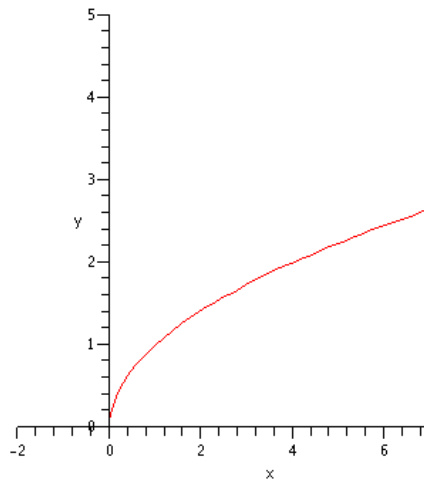


FIG. 2 – Exemple de la fonction racine carrée.

2.1.2 Dérivée de fonctions usuelles

Par calculer la dérivée d'une fonction, on utilise les dérivées des fonctions usuelles, rappelées dans le tableau 1, ainsi que les règles de dérivation suivantes : Soient f et g deux fonctions et λ un nombre réel,

- la dérivée de $f + g$ est $f' + g'$,
- la dérivée de λf est $\lambda f'$,
- la dérivée du produit fg est $f'g + fg'$,
- la dérivée du quotient f/g quand elle existe est $(f'g - fg')/g^2$.

Il reste juste à parler de la dérivée de la composée de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions, on appelle composée de f et g , la fonction définie (quand cela est possible) au point x par $f(g(x))$. On calcule donc $g(x)$ puis on évalue f en cette valeur. Par exemple, si $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x - 5$, on a $f(g(x)) = f(2x - 5) = (2x - 5) + 3 = 2x - 2$. Quand cela est possible, la dérivée de la composée de f et g est donnée au point x par

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x).$$

Remarque 11 *Jusqu'ici, nous avons utilisé pour le domaine de définition de la fonction qui à x associe $1/x$, la notation " $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ ", nous allons utiliser maintenant une notation plus condensée qui est " \mathbb{R} privé de 0" que l'on note $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il s'agit en fait exactement de la même chose.*

Fonction qui à x associe	Domaine de définition	Dérivée	Domaine de défini- tion de la dérivée
$f(x) = C$, C constante	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = ax + b$, a et b réels	\mathbb{R}	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$, n appartenant à \mathbb{N}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c et d étant des réels	$\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$	$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$

TAB. 1 – Dérivées de fonctions usuelles.

Donnons pour finir cette partie un exemple utilisant la composée de deux fonctions. On se propose de calculer la dérivée de la fonction qui à x associe $f_1(x) = x^{-n}$ pour n appartenant à \mathbb{N} . Cette fonction est la composée de la fonction qui à x associe $f(x) = x^n$ et de la fonction qui à x associe $g(x) = 1/x$. On a donc pour x strictement positif,

$$f_1'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = n \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \times -\frac{1}{x^2} = -nx^{-n-1}.$$

2.2 Définition des dérivées partielles dans le cas de fonctions de deux variables

Pour une fonction de deux variables qui à (x, y) associe $f(x, y)$, on peut étudier l'existence en chaque point (x_0, y_0) de son domaine de définition de **deux** dérivées dites **dérivées partielles**. On peut considérer f comme étant une fonction numérique d'une variable réelle x si on fixe y à la valeur y_0 , dans ce cas on peut regarder la dérivée de la fonction qui à x associe $f(x, y_0)$ en $x = x_0$. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

il s'agit de la première dérivée. La seconde est obtenue en faisant varier non plus x mais y , on considère donc f comme étant une fonction numérique d'une variable réelle y en fixant x à la valeur x_0 . Dans ce cas on peut regarder la dérivée de la fonction qui à y associe $f(x_0, y)$ en $y = y_0$. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Il est important de bien voir que ces deux valeurs ne sont pas les mêmes. Prenons l'exemple de la fonction qui à (x, y) associe $f(x, y) = x^2 + y$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1.$$

Par définition, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

L'interprétation géométrique des dérivées partielles est la suivante : notons tout d'abord que les deux "fonctions partielles" qui à x associent $f(x, y_0)$ et qui à y associent $f(x_0, y)$ ont pour graphes les courbes intersection de la surface qui correspond au graphe de f avec les plans d'équations $y = y_0$ et $x = x_0$, respectivement. Si l'on représente les deux tangentes à ces deux graphes au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, qui ont pour pentes les deux dérivées partielles, on constate que ces droites déterminent le plan tangent au graphe de f en ce point, voir par exemple la figure 3. On peut donc calculer l'équation du plan tangent au graphe de f , lorsqu'il existe, à l'aide de ses deux dérivées partielles, il est donné par

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Calculons par exemple l'équation du plan tangent à la surface $z = x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 2)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x,$$

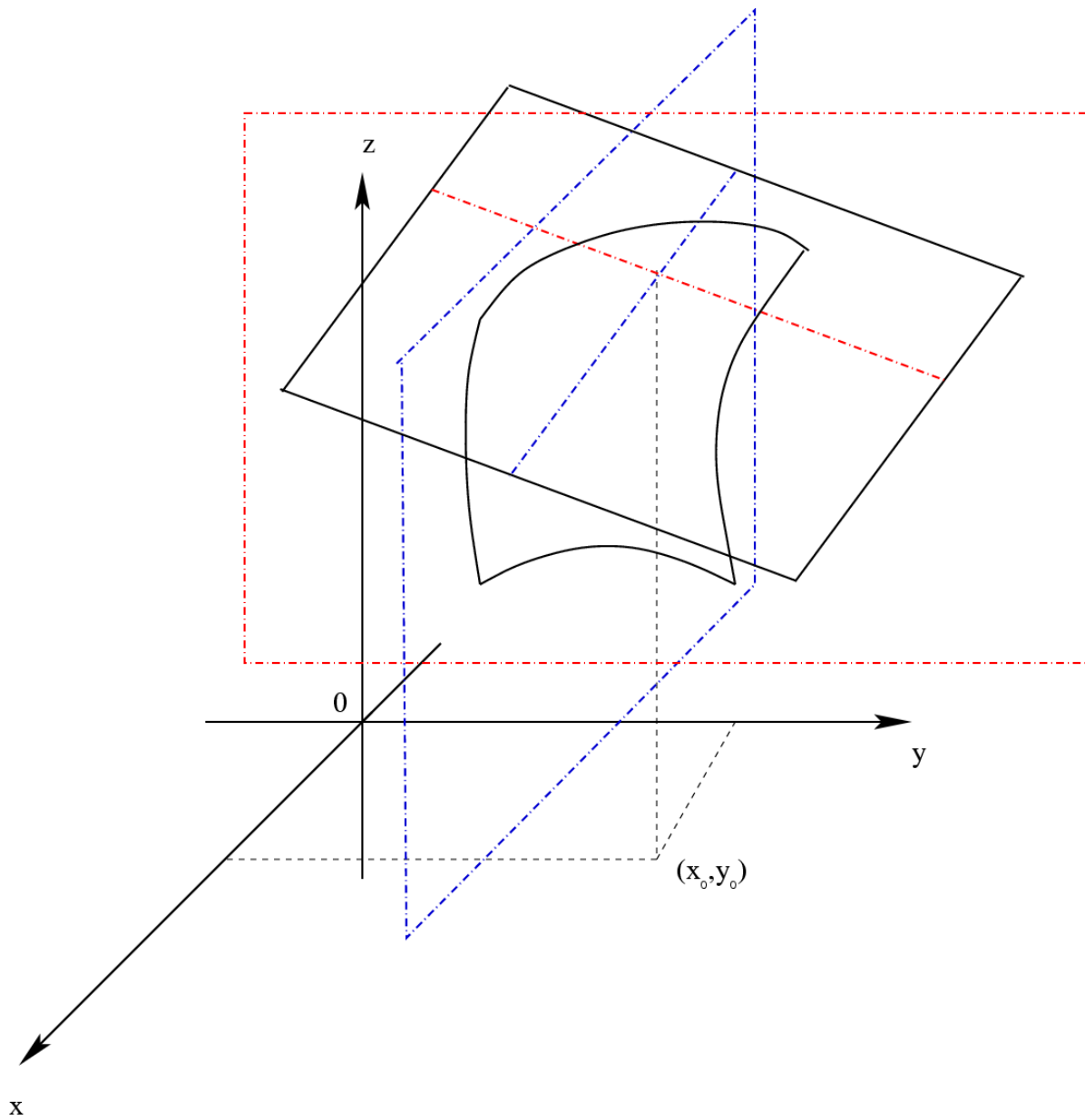


FIG. 3 – Exemple de plan tangent.

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Le plan a donc pour équation

$$z = 2x + 2y - 2.$$

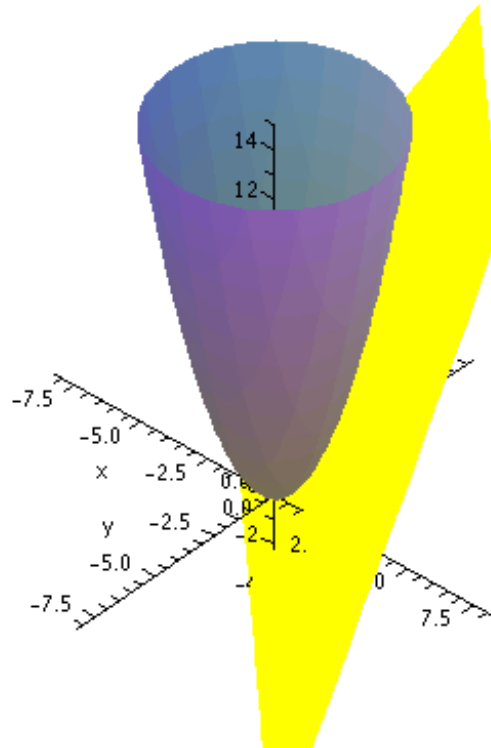


FIG. 4 – Graphe de $z = x^2 + y^2$ et son plan tangent au point $(1, 1, 2)$.

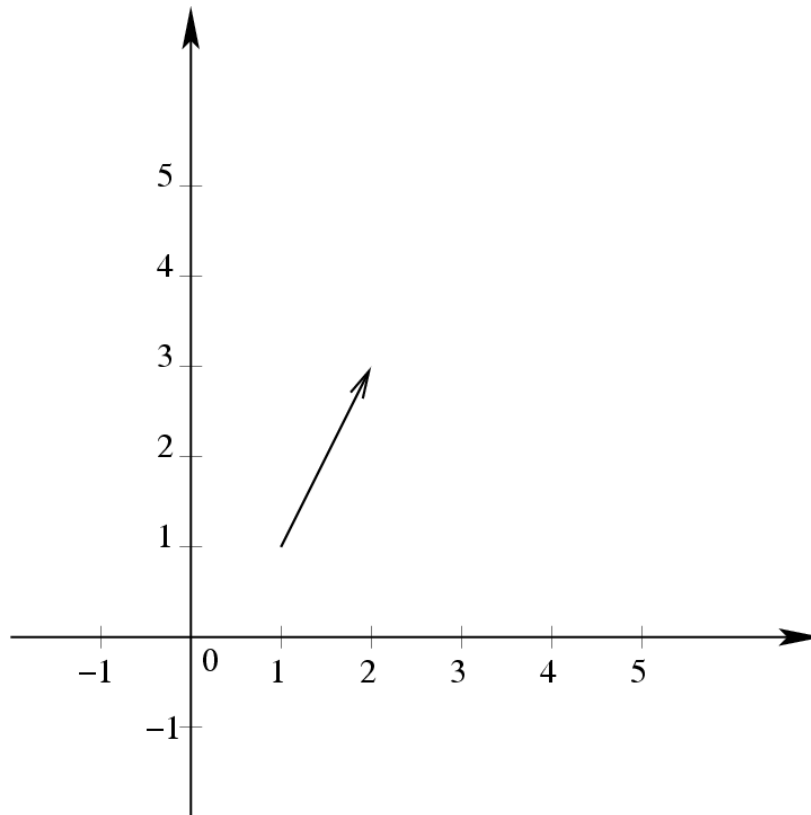
Nous allons maintenant définir le *gradient* d'une fonction en un point. Rappelons que l'on peut se représenter un vecteur dans le plan comme un segment orienté (une «flèche») dont l'emplacement dans le plan n'a pas d'importance, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. On peut donc le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même. On définit le vecteur par ses composantes (l'équivalent des coordonnées pour les points dans le plan), on utilise en général la notation suivante :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

L'exemple du vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est représenté sur la figure 5.

FIG. 5 – Exemple du vecteur \vec{u} .

Definition 16 *Le vecteur ayant pour composantes les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) est appelé le **gradient** de f au point (x_0, y_0) . On le note à l'aide d'un symbole mathématique qui ressemble à un triangle inversé*

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Calculons, par exemple, le gradient de la fonction qui à (x, y) associe $f(x, y) = x^2y$ au point $(1, 2)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2,$$

on en déduit que

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 12 *Comme $f(1, 2) = 2$, la courbe de niveau de f issue du point $(1, 2)$ est la courbe d'équation $y = 2/x^2$. L'équation de la tangente en $x = 1$ de cette courbe est donc*

$y = -4x + 6$. Si l'on représente sur un même graphe, cette tangente et le gradient de f au point $(1, 2)$ (voir la figure 6), on remarque que ces deux sont perpendiculaires et c'est un résultat général.

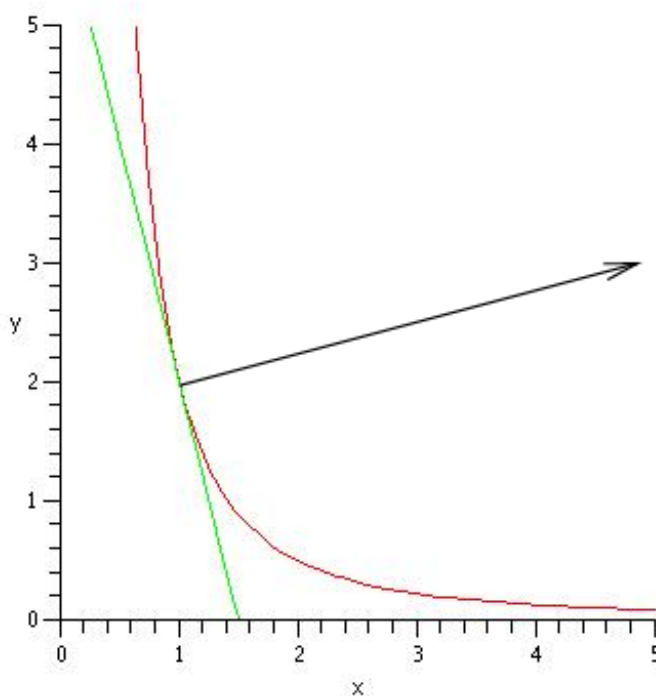


FIG. 6 – Représentation de la tangente et du gradient.

2.3 Sens de variation, dérivée seconde et convexité pour les fonctions d'une variable

Nous allons voir maintenant l'intérêt de la fonction dérivée pour étudier le sens de variation d'une fonction. Soient $I = [a_0, b_0]$ un intervalle avec $a_0 < b_0$, et f une fonction d'une variable réelle possédant une dérivée sur I , c'est-à-dire que

- f est dérivable en tout point appartenant à $]a_0, b_0[$,
- la limite du taux de variation de f entre a_0 et $a_0 + h$ existe quand h tend vers 0 pour h **positif**,
- la limite du taux de variation de f entre b_0 et $b_0 + h$ existe quand h tend vers 0 pour h **négatif**.

Une fonction f possédant une dérivée sur I est croissante sur I (respectivement décroissante sur I) si et seulement si pour tout x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$ (respectivement si et seulement si pour tout x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$).

Donnons deux exemples, soit f la fonction qui à x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels et a différent de 0. Il s'agit donc d'une fonction quadratique que nous avons

déjà rencontré à la section 1.5.4. Nous avons vu que le point d'abscisse $-b/2a$ était un point important et nous allons retrouver ce résultat. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = 2ax + b = 2a(x + b/2a).$$

Si a est strictement positif, la fonction est donc décroissante sur $] -\infty, -b/2a]$ et croissante sur $[-b/2a, +\infty[$. Si a est strictement négatif, la fonction est donc croissante sur $] -\infty, -b/2a]$ et décroissante sur $[-b/2a, +\infty[$. On a bien retrouvé les résultats énoncés dans la section 1.5.4.

Deuxième exemple, soit f la fonction qui à x associe $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2.$$

La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} et est représentée sur la figure 7.

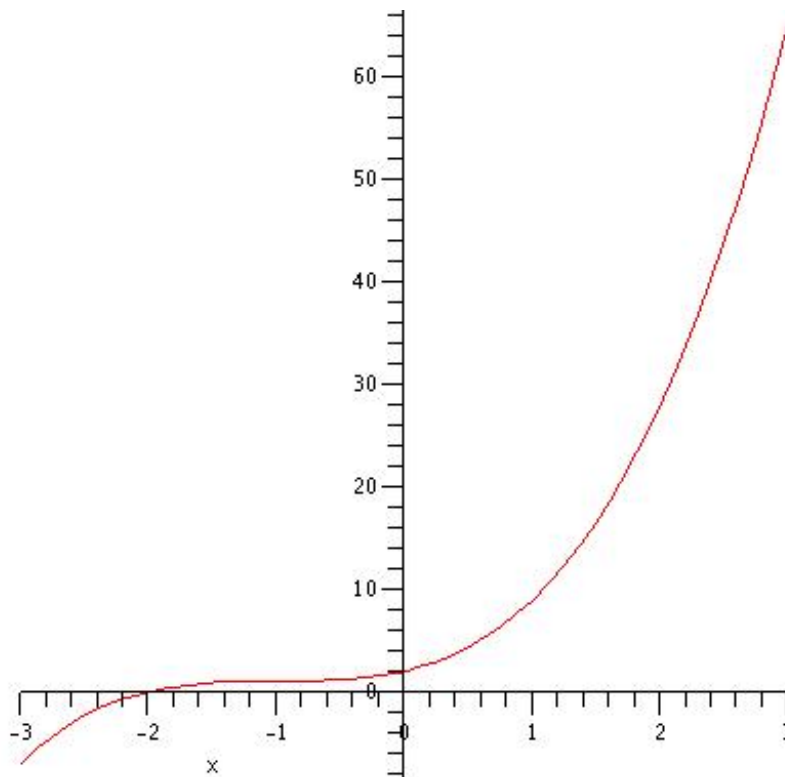


FIG. 7 – Graphe de la fonction f .

La position du graphe d'une fonction par rapport à sa tangente en un point donne des indications sur la croissance de la fonction en ce point comme le montre les quatre graphiques suivants :

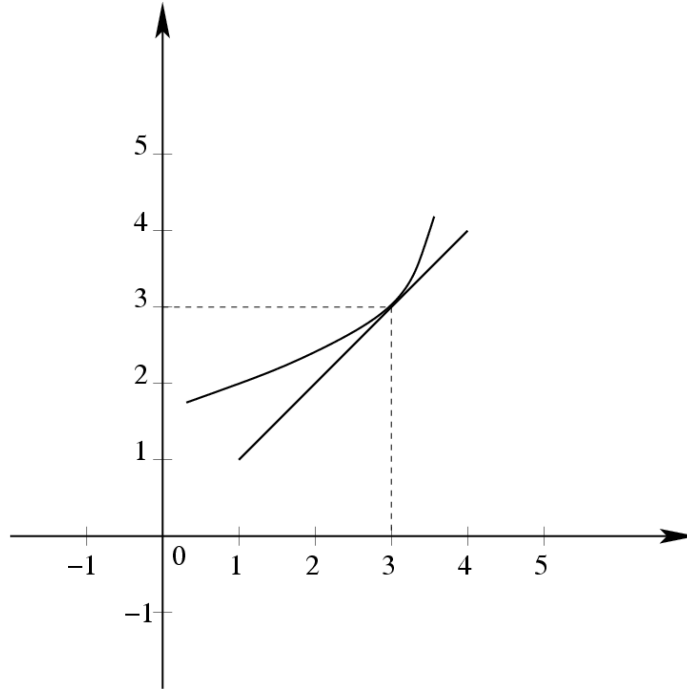


FIG. 8 – Courbe croissante située au dessus de sa tangente, **Croissance accélérée**

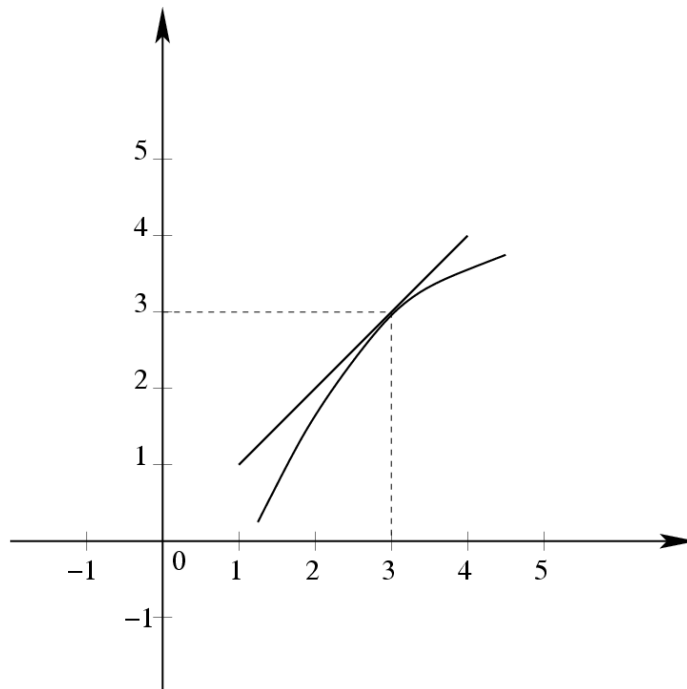


FIG. 9 – Courbe croissante située au dessous de sa tangente, **Croissance freinée**

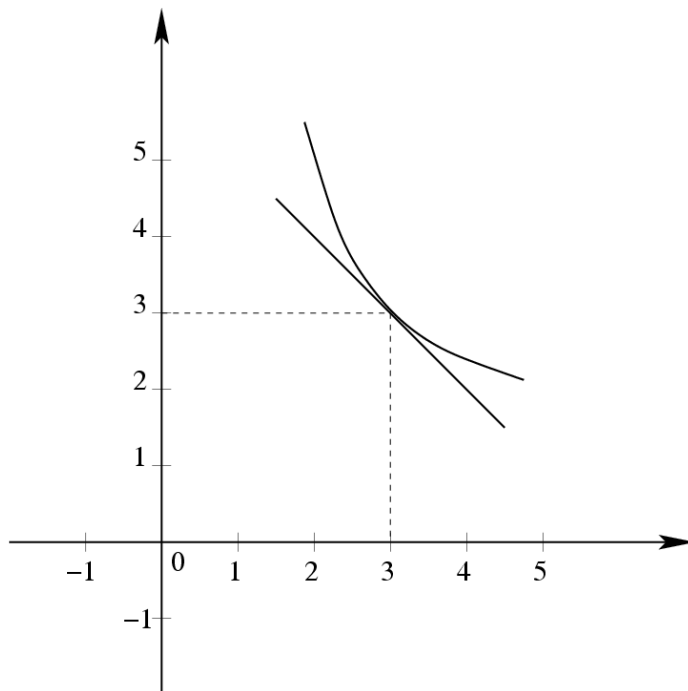


FIG. 10 – Courbe décroissante située au dessus de sa tangente, **Décroissance freinée**

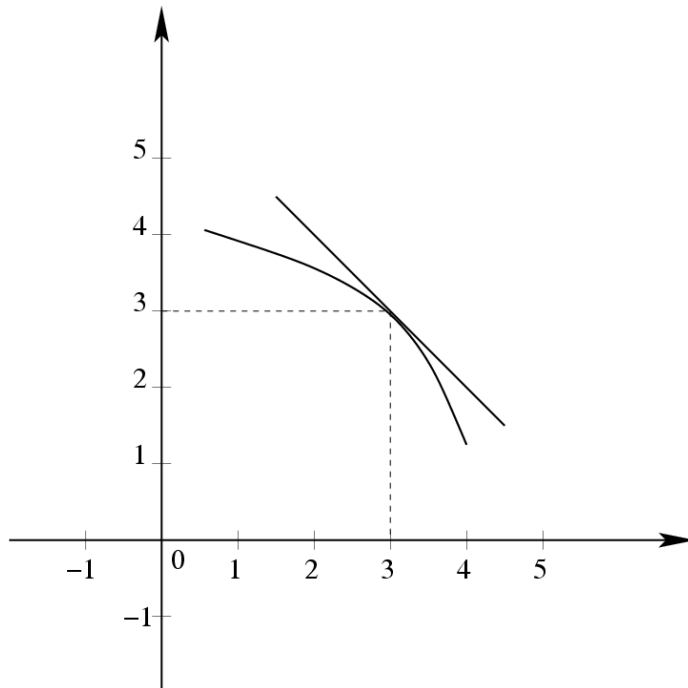


FIG. 11 – Courbe décroissante située au dessous de sa tangente, **Décroissance accélérée**

Le graphe de la fonction est situé au dessus de sa tangente lorsque sa dérivée est elle-même croissante, le taux d'accroissement de la fonction augmente. Ceci se traduit par le fait que la dérivée f' a elle-même une dérivée positive. La dérivée de la dérivée de f s'appelle la **dérivée**

seconde de f et se note f'' . On remarque que le graphe de la fonction est situé au dessous de sa tangente lorsque la dérivée de f a elle-même une dérivée négative et donc lorsque f'' est négative.

Pour calculer la dérivée seconde d'une fonction, on calcule la dérivée puis à nouveau la dérivée de la fonction obtenue. Par exemple, si on considère la fonction f qui à x associe $f(x) = x^2 + 5x + 1$, on a

$$f'(x) = 2x + 5$$

et

$$f''(x) = 2.$$

Definition 17 Une fonction f qui à x associe $f(x)$ dont la dérivée seconde est positive pour toute valeur de x dans un intervalle est dite **convexe** sur cet intervalle. Une fonction f qui à x associe $f(x)$ dont la dérivée seconde est négative pour toute valeur de x dans un intervalle est dite **concave** sur cet intervalle.

En résumé, si $f''(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à $[a, b]$, alors f est convexe sur $[a, b]$ et si $f''(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à $[a, b]$, alors f est concave sur $[a, b]$.

Exemple 18 Donnons deux exemples, soit f_1 la fonction qui à x associe x^2 , qui rappelons le est une parabole ouverte vers le haut, est convexe sur \mathbb{R} car au point x , $f_1''(x) = 2$ qui est positif. Soit f_2 la fonction qui à x associe $1/x$, f_2 est concave sur $] -\infty, 0[$, car pour $x < 0$, $f_2''(x) = 2/x^3$ qui est négatif.

Les points x du domaine de définition d'une fonction f où f'' s'annule et change de signe, qui correspondent donc à des points du graphe où convexité/concavité de la fonction s'inverse sont appelés des **points d'inflexion**.

Par exemple, la fonction qui à x associe x^3 est convexe pour x strictement positif et concave pour x strictement négatif. Le point d'abscisse $x = 0$ est un point d'inflexion. Dans les cas que l'on rencontre en pratique, la fonction est alternativement concave ou convexe sur différents intervalles séparés par des points d'inflexion pour lesquels la tangente traverse la courbe représentative de la fonction.

2.4 Dérivées partielles secondes et convexité pour les fonctions de deux variables

Pour les fonctions de deux variables, les dérivées partielles secondes sont au nombre de quatre : ce sont les deux dérivées partielles premières de la fonction qui à (x, y) associe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, que l'on note respectivement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ et les deux dérivées partielles premières de la fonction qui à (x, y) associe $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, que l'on note respectivement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$. Pour les fonctions usuelles, on a généralement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

On dispose ces quatre dérivées partielles secondes dans un tableau que l'on appelle **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) :

$$H(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Definition 19 On appelle hessien de f au point (x_0, y_0) la différence des produits croisés

$$\text{Hess } f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Exemple 20 Soient f_1 , f_2 et f_3 les fonctions qui à (x, y) associent $f_1(x, y) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y) = -x^2 - y^2$, $f_3(x, y) = x^2 - y^2$. On a

$$\overrightarrow{\nabla} f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} f_2(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Hess } f_1(x, y) = 4, \quad \text{Hess } f_2(x, y) = 4, \quad \text{Hess } f_3(x, y) = -4.$$

Sur ces exemples, on remarque que dans les deux premiers cas, pour lesquels les graphes sont des paraboloides, les hessiens sont strictement positifs. Au contraire dans le troisième cas, le hessien est strictement négatif. Plus généralement, on retiendra que lorsque le hessien est strictement positif, la fonction est au point considéré

- soit convexe, c'est-à-dire que son graphe, qui est au dessus du plan tangent, ressemble *en gros* à un bol ouvert vers le haut, comme sur la figure 23,
- soit concave, c'est-à-dire que son graphe, qui est au dessous du plan tangent, ressemble *en gros* à un bol renversé, comme sur la figure 24.

Au contraire lorsque le hessien est strictement négatif, la fonction n'est ni convexe, ni concave au point considéré, son graphe peut ressembler à une selle comme sur la figure 25. Enfin, lorsque le hessien est nul, il se peut que la fonction soit, au point considéré, convexe, concave ou ni l'une ni l'autre, une étude plus fine serait nécessaire pour connaître le comportement de f .

En résumé, au point (x_0, y_0) , si le hessien de f est strictement positif et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ est également strictement positif, alors f est convexe au point considéré, si le hessien de f est strictement positif et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ est strictement négatif alors f est concave au point considéré, si le hessien de f est strictement négatif alors f n'est ni convexe, ni concave au point considéré et si le hessien de f est nul, on ne peut pas conclure.

Remarque 13 On peut se demander pourquoi dans les deux premiers cas, il suffit seulement d'une hypothèse sur $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ n'intervient pas. Mais comme le hessien est strictement positif et que l'on a supposé que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right)^2 \geq 0,$$

ce qui implique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ sont du même signe. Il n'y a donc pas besoin d'ajouter d'hypothèse sur le second terme.

Exemple 21 Calculons le hessien de la fonction qui à (x, y) associe $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2$ au point $(0, 0)$. On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix}$$

et

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\text{Hess}f(0, 0) = -8 - 9 = -17$, il est strictement négatif en $(0, 0)$ et d'ailleurs en tout autre point (x, y) , donc f n'est ni concave, ni convexe, son graphe est représenté sur la figure 12.

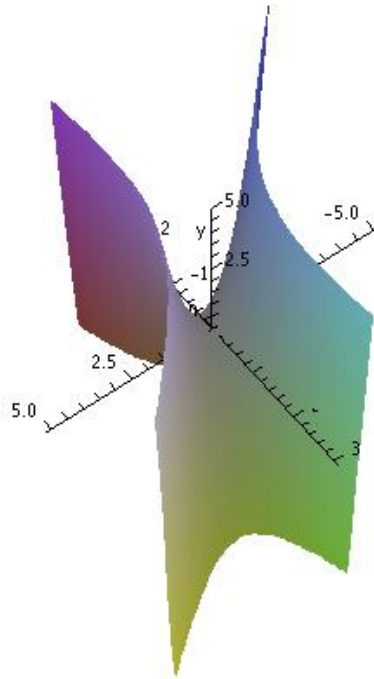


FIG. 12 – Graphe de la fonction f .

Remarque 14 Dans l'exemple précédent, le hessien est indépendant du point considéré, il s'agit d'un cas particulier qui vient du fait que la fonction est quadratique, ce n'est bien-sûr que rarement le cas.

2.5 Fonctions homogènes

Parmi les fonctions utilisées en économie, beaucoup ont une propriété remarquable, qui sert dans le calcul : elles sont homogènes.

Definition 22 Une fonction f qui à (x, y) associe $f(x, y)$ est homogène de degré n si lorsqu'on multiplie x et y par une constante λ strictement positive, la valeur de la fonction se trouve multipliée par λ^n , c'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 23 La fonction de Cobb-Douglas qui à (x, y) associe $x^a y^b$ est homogène de degré $n = a + b$, car

$$(\lambda x)^a (\lambda y)^b = \lambda^a x^a \lambda^b y^b = \lambda^{a+b} x^a y^b.$$

Exercice 5 Montrer que la fonction qui à (x, y) associe $x^3 + x^2 y - y^3$ est homogène en précisant son degré et que la fonction qui à x associe $x^3 - x^3 y^3 + y^3$ ne l'est pas.

On peut vérifier que lorsque qu'une fonction f est homogène de degré n , ses dérivées partielles sont également homogènes mais de degré $n - 1$ cette fois. On a dans ce cas une relation simple entre la fonction et ses dérivées partielles, que l'on appelle le **théorème d'Euler** : Si f est homogène de degré n alors

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y).$$

Chapitre 3

Optimisation

3.1 Extrema locaux et globaux de fonctions d'une variable

Lorsque l'on parle d'extremum d'une fonction, il faut faire une distinction entre les notions d'extremum local et d'extremum global. Par définition, un **maximum local** d'une fonction f est un point x_0 où la fonction f est plus grande que pour les valeurs voisines de x_0 . Au contraire, un **maximum global** (ou absolu) est un point x_0 où la fonction prend sa plus grande valeur relativement au domaine tout entier. On a des définitions analogues pour les minima.

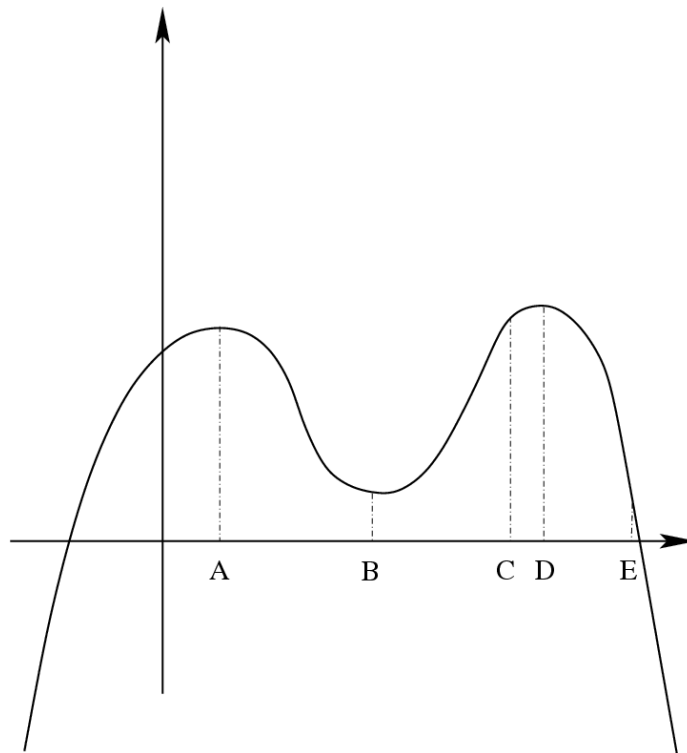


FIG. 1 – Un exemple d'extrema.

Exemple 24 Sur le graphe 1, on voit que A est un maximum local de la fonction, bien qu'en C la valeur soit plus grande qu'en A , et D un maximum global. De même, B est un minimum local, bien qu'en E la valeur de la fonction soit inférieure. La fonction n'a pas de minimum global.

Exemple 25 Les fonctions linéaires, dont les graphes sont des droites, n'ont ni minimum local, ni maximum local.

Les fonctions quadratiques, dont les graphes sont des paraboles, ont soit un maximum local, qui est également maximum global, et pas de minimum, soit un minimum local, qui est également minimum global, et pas de maximum.

Supposons tout d'abord que nous travaillons sur \mathbb{R} tout entier, c'est-à-dire que le domaine de définition de la fonction est \mathbb{R} , en un maximum local, la fonction qui était croissante cesse de croître et commence à décroître. Un maximum est donc un point où la dérivée de la fonction s'annule. C'est également le cas pour les minima locaux.

Mais à l'inverse, le fait que la dérivée soit nulle en un point n'entraîne pas forcément que ce point est un extremum. Ainsi, par exemple, les deux fonctions qui à x associent $f_1(x) = x^3$ et $f_2(x) = 1$ ont l'une et l'autre une dérivée nulle en $x_0 = 0$ sans pour autant posséder un extremum en ce point : la première a en 0 un point d'inflexion, la seconde est constante.

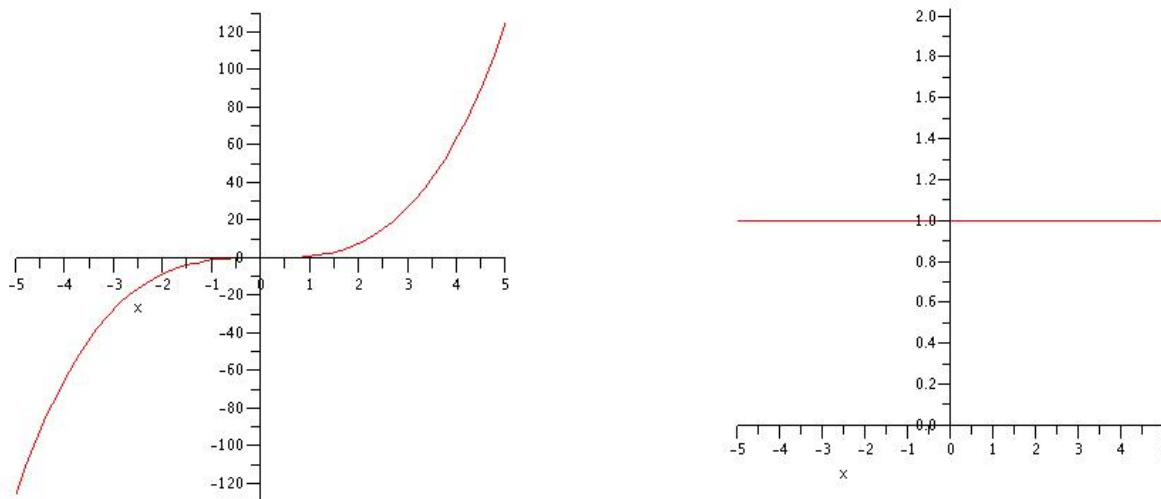


FIG. 2 – Graphe des deux fonctions f_1 et f_2 .

Pour être sûr qu'un point où la dérivée s'annule est bien un extremum local, il faut qu'en ce point la fonction devienne décroissante si elle était croissante et croissante si elle était décroissante. En d'autres termes, il faut qu'en ce point la dérivée change de signe. Il suffit pour cela que la dérivée seconde ne soit pas nulle. On a les règles suivantes :

- si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local de f ,
- si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local de f ,
- si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$ alors x_0 peut être ou ne pas être un extremum de f .

Pour déterminer les extrema d'une fonction f , on calcule la dérivée première f' et on détermine les zéros de f' , c'est-à-dire, rappelons le, les réels x tels que $f'(x) = 0$. On trouve en

général un petit nombre de candidats à être des extrema, on calcule alors la dérivée seconde f'' et selon le signe de f'' en chacun de ces points, on peut alors conclure qu'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, au moins dans les cas où f'' est non nulle. En un point où f'' s'annule, on ne peut pas se prononcer, il convient de faire une étude plus fine du graphe de f au voisinage du point considéré.

Si l'on a trouvé plusieurs minima locaux, le minimum global, **s'il existe**, sera celui des minima locaux où la valeur de f est la plus petite. On calcule donc la valeur de f en chacun de ces points et on conclut facilement. On procède de même pour les maxima globaux. Mais attention, il arrive qu'il n'existe pas d'extrema globaux, comme par exemple, pour la fonction représentée sur le graphe 3.

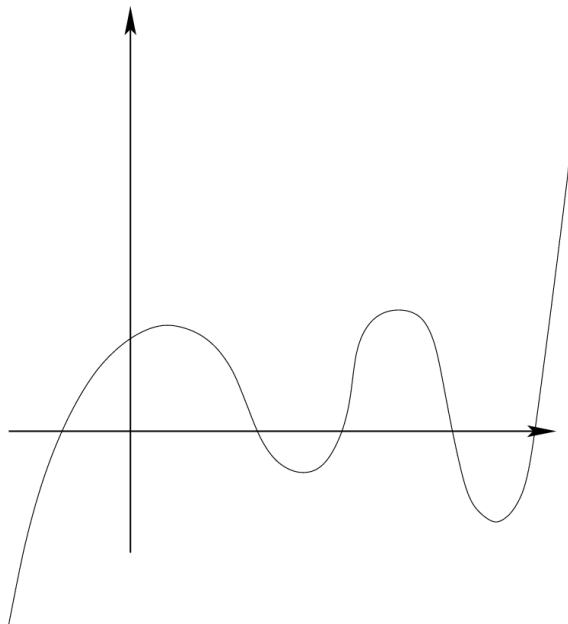


FIG. 3 – Un exemple de fonction sans minimum et maximum global.

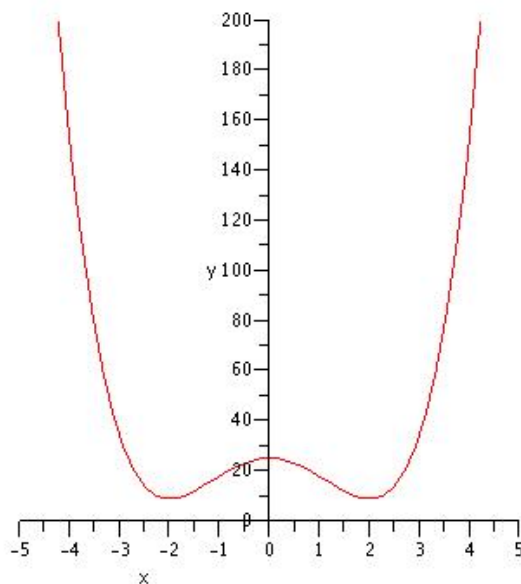
Exemple 26 *Trouvons les extrema locaux de la fonction f qui à x associe $f(x) = (x^2 - 5)^2 + 2x^2$ et indiquons leur nature : maximum ou minimum. La dérivée de f au point x est donnée par*

$$f'(x) = 2(x^2 - 5)(2x) + 4x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2).$$

La dérivée s'annule pour $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$, il y a donc trois extrema locaux possibles. La dérivée seconde de f est donnée au point x par

$$f''(x) = 4(x^2 - 4) + 4x(2x) = 4x^2 - 16 + 8x^2 = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4).$$

En particulier $f''(0) = -16$, $f''(-2) = f''(2) = 32$. On en déduit que 0 est un maximum et les points -2 et 2 sont des minima de f . -2 et 2 sont des minima locaux mais 0 est un maximum local seulement.

FIG. 4 – Graphe de f .

Il reste à se poser la question d'une fonction qui n'est pas définie sur \mathbb{R} tout entier, par exemple, elle peut être définie seulement sur un intervalle, ou sur plusieurs intervalles. Dans ce cas, il faut ajouter dans les candidats pouvant être un extremum, **tous** les points qui sont «aux bords» des intervalles.

Exemple 27 *Trouvons les extrema locaux de la fonction f qui à x associe $f(x) = (x^2 - 5)^2 + 2x^2$ sur l'intervalle $[-4, 4]$. Comme nous l'avons vu, la dérivée s'annule pour $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$, et il faut ajouter les «bords» de l'intervalle, c'est-à-dire -4 et 4 , il y a donc cinq extrema locaux possibles. 0 est un maximum avec $f(0) = 35$ et les points -2 et 2 sont des minima avec $f(-2) = 9$ et $f(2) = 9$, de plus $f(-4) = 153$ et $f(4) = 153$. Sur $[-4, 4]$, -2 et 2 sont donc des minima globaux, 0 est un maximum local et -4 et 4 sont des maxima globaux.*

Remarque 15 *On peut aussi dans ce cas dresser le tableau des variations de la fonction mais ceci demande l'étude du signe de la dérivée, ce qui s'avère parfois assez long.*

3.2 Extrema locaux des fonctions de deux variables

Le cas des fonctions de deux variables est semblable au cas des fonctions d'une variable. Par définition, un minimum local (x_0, y_0) est un point où f prend une valeur plus petite que les valeurs qu'elle prend au points voisins. Si l'on examine le graphe d'une fonction qui présente un minimum en un point (x_0, y_0) , on s'aperçoit qu'en un tel point **le plan tangent est horizontal**. La situation est la même pour les maxima. Ceci s'exprime par le fait qu'en un extremum local les deux dérivées partielles sont nulles ou encore que le gradient de la fonction est le vecteur nul, on appelle ces points des **points critiques**.

Mais comme pour les fonctions d'une variable, il ne suffit pas d'avoir un gradient nul en un point pour que ce point soit un extremum, il peut s'agir d'un point selle comme sur la figure 25.

Pour pouvoir assurer qu'un point (x_0, y_0) pour lequel le gradient est nul est effectivement un extremum, il convient de calculer les dérivées partielles secondes de f et plus précisément le hessien qui, comme nous l'avons vu, caractérise la convexité de la surface.

On a les règles suivantes : on se donne un point (x_0, y_0) et on suppose que

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si le hessien de f au point (x_0, y_0) est

- strictement positif alors le point (x_0, y_0) est un extremum local de f et si
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, c'est un maximum,
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, c'est un minimum,
- strictement négatif alors le point (x_0, y_0) n'est pas un extremum local de f ,
- nul alors le point (x_0, y_0) peut être ou ne pas être un extremum local de f .

Exemple 28 Trouvons les extrema locaux de la fonction f qui à (x, y) associe

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1 + x^2 + y^2 - 2x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + y^2 - x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Il n'y a que deux points pour lesquels le gradient est nul, il s'agit de $(1, 0)$ et de $(-1, 0)$. Calculons maintenant les dérivées partielles secondes, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \frac{x(-3 + x^2 - 3y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -\frac{1}{2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = \frac{1}{2}.$$

De même,

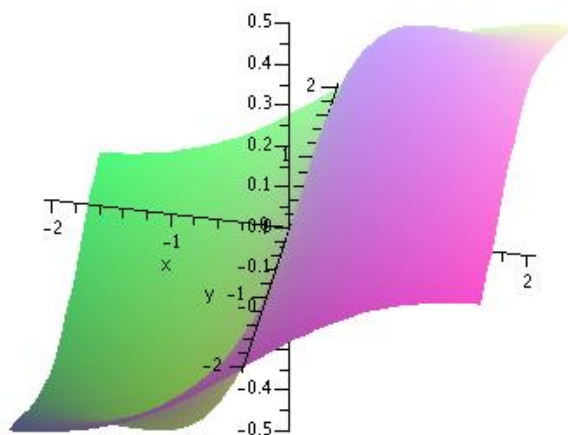
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \frac{x(-3y^2 + 1 + x^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = -\frac{1}{2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) = \frac{1}{2}.$$

FIG. 5 – Graphe de f .

Enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \frac{y(-1 + 3x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0) = 0.$$

En en déduit que $\text{Hess}(f)(1, 0) = 1/4$ et que $\text{Hess}(f)(-1, 0) = 1/4$, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) < 0$, le point $(1, 0)$ est un maximum local alors que, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) > 0$, le point $(-1, 0)$ est un minimum local.

3.3 Plus petite ou plus grande valeur d'une fonction

On a vu que les fonctions qui à (x, y) associent $f(x, y)$ n'ont pas toujours un maximum ou un minimum. Par exemple, si le graphe de f est un plan, f prend des valeurs arbitrairement grandes, elle ne possède donc pas de plus grande valeur.

En revanche si l'on suppose que (x, y) est contraint d'appartenir à un domaine borné et fermé, c'est-à-dire un domaine du plan qui ne contient pas de points de coordonnées arbitrairement grandes et qui possède une frontière bien délimitée, par exemple, un rectangle

ou un triangle, alors il existe forcément des points où f prend sa plus petite valeur et des points où f prend sa plus grande valeur.

Deux cas peuvent se présenter :

- soit les points où f prend sa plus petite valeur ou sa plus grande valeur sont situés à l'intérieur du domaine et dans ce cas, ces points sont des extrema locaux, c'est-à-dire des points où le gradient de f est nul.
- soit ces points sont situés sur la frontière du domaine.

Pour déterminer la plus petite ou la plus grande valeur d'une fonction dans un domaine fermé et borné, on procédera donc de la façon suivante :

1. Rechercher les extrema locaux de la fonction, c'est-à-dire les points où son gradient s'annule. Ne garder que ceux qui appartiennent au domaine, et vérifier si ce sont bien des minima ou des maxima à l'aide du hessien.
2. Etudier la fonction sur le bord du domaine et trouver ses "valeurs extrêmes" : on peut en général exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x et se ramener ainsi à l'étude des extrema d'une fonction d'une seule variable.
3. Comparer les valeurs de f aux divers points obtenus en 1) et 2) et ne retenir que la plus petite et la plus grande valeur.

Exemple 29 *Trouver la plus petite et la plus grande valeur de la fonction qui à (x, y) associe $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ dans le domaine $x \leq 0$, $y \leq 0$ et $x + y \geq -3$.*

1. On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 2y - x + 1 \end{pmatrix},$$

le point annulant le gradient de f est donc $(-1, -1)$. Ce point est dans le domaine puisqu'il vérifie les trois inégalités. On a $\text{Hess}(f)(-1, -1) = 5$, ce point est donc un minimum local pour f .

2. Le domaine représenté sur la figure 6 est un triangle.

Sur le côté $x = 0$, la fonction ne dépend plus que d'une variable et est la fonction qui à y associe $y^2 + y$. C'est donc une parabole qui décroît de la valeur 6, atteinte pour $y = -3$ à la valeur $-1/4$ en $y = -1/2$ puis croît à nouveau jusqu'à la valeur 0.

Sur le côté $y = 0$, la fonction ne dépend plus que d'une variable et est la fonction qui à x associe $x^2 + x$. C'est donc la même parabole qui décroît de la valeur 6, atteinte pour $x = -3$ à la valeur $-1/4$ en $x = -1/2$ puis croît à nouveau jusqu'à la valeur 0.

Enfin sur le côté $x + y = -3$, la fonction devient la fonction qui à (x, y) associe $3x^2 + 9x + 6$. C'est encore une parabole qui atteint sa plus petite valeur en $x = -3/2$ et sa plus grande valeur en $x = -3$.

3. On calcule la valeur de f en chacun des points trouvés précédemment :

- $f(-1, -1) = -1$,
- $f(0, -1/2) = -1/4$, $f(0, -3) = 6$,
- $f(-1/2, 0) = -1/4$, $f(-3, 0) = 6$,
- $f(-3/2, -3/2) = -3/4$, $f(0, -3) = 6$.

La plus petite valeur de f est donc -1 au point $(-1, -1)$ et la plus grande est 6 aux points $(0, -3)$ et $(-3, 0)$.

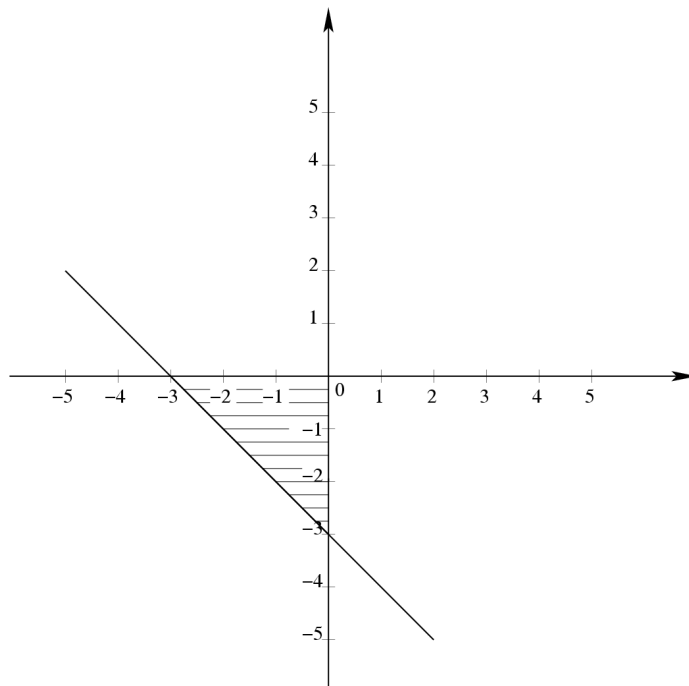


FIG. 6 – Domaine triangulaire.

Terminons ce paragraphe par une remarque d'ordre général, la méthode décrite n'est valable que dans les cas les plus simples, on dispose en fait d'une méthode générale de recherche d'extrema sur un domaine de ce type, appelée méthode de Kuhn et Tucker, qui utilise un lagrangien adéquat mais nous ne l'étudierons pas.

3.4 Extrema liés

On parle d'extremum lié lorsque l'on cherche un extremum d'une fonction qui à (x, y) associe $f(x, y)$ qui doit en même temps satisfaire une **contrainte** du type suivant : $\varphi(x, y) = 0$.

C'est une situation très fréquente en économie, par exemple, supposons que l'on recherche la combinaison (C, T) de capital et de travail qui rende maximum une fonction de production $Q(C, T)$ tout en respectant une contrainte budgétaire $aC + bT = B$, B étant le budget total, a le prix d'une unité de capital et b le prix d'une unité de travail. On est en présence d'un problème d'extrema liés : Trouver le maximum de la fonction qui à (C, T) associe $Q(C, T)$ lié par la contrainte $\varphi(C, T) = aC + bT - B = 0$.

Pour comprendre le problème, d'un point de vue géométrique, supposons que le graphe de la fonction à optimiser soit le graphe de la figure 7 et représentons la contrainte par une droite D dans le plan Oxy . On voit que le maximum de f s'il n'y avait eu aucune contrainte serait le maximum local M . Mais si l'on impose à (x, y) d'appartenir à la droite D , ce maximum est alors le point M' , qui, lui, n'est pas un maximum local de f , le plan tangent en ce point n'étant pas horizontal.

Pour déterminer les coordonnées d'un extremum lié par une contrainte $\varphi(x, y) =$, on introduit une fonction auxiliaire, appelée Lagrangien du problème, qui dépend non seulement

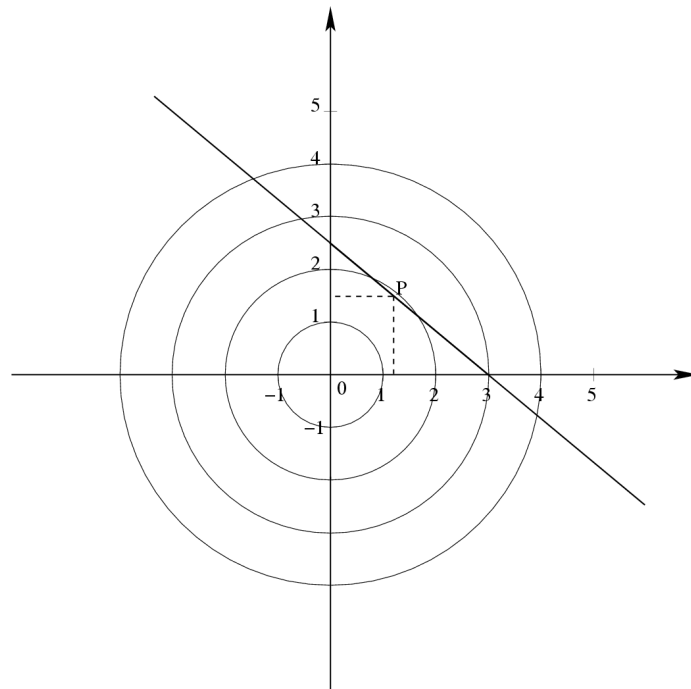


FIG. 8 – Exemple d'extrema liés.

Chapitre 4

Exponentielles et logarithmes

Dans les phénomènes que l'on est amené à étudier, il y a des évolutions qui au lieu de se dérouler selon un processus toujours identique à lui-même, semblent s'emballer : c'est le cas par exemple des phénomènes de croissance pour lesquels les fruits de la croissance deviennent à leur tour productifs. Il se produit alors ce que l'on appelle une **croissance exponentielle**. Les modèles mathématiques de telles évolutions font usage des fonctions exponentielles que nous allons étudier dans ce chapitre, ainsi que leurs réciproques les fonctions logarithmes.

4.1 Les fonctions exponentielles

La fonction exponentielle (de base e) est une fonction qui à chaque nombre réel x associe un nombre réel e^x (parfois noté aussi $\exp(x)$) strictement positif ; elle croît brutalement de valeurs très petites quand x est négatif à des valeurs très grandes quand x est positif. L'allure de son graphe est familière à tous grâce à la tour Eiffel.

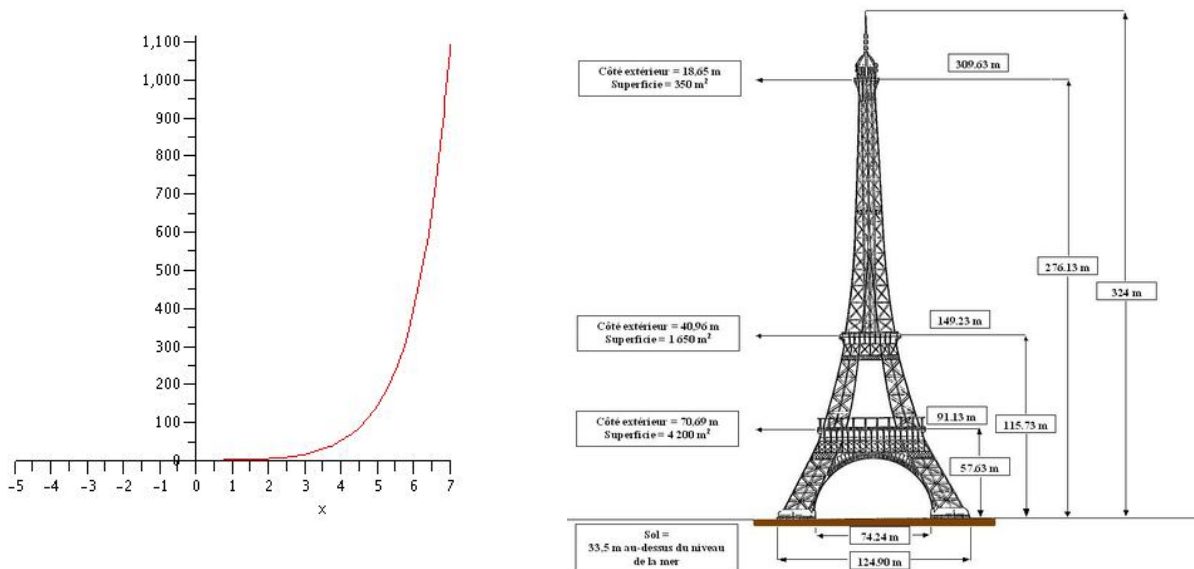


FIG. 1 – Le graphe de la fonction exponentielle et une image de la tour Eiffel (issue de Wikipedia).

x	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10
e^x	0,00004539	0,00673	0,135335	0,3678794	1	e	7,389056	148,41315	22026,46579

TAB. 1 – Quelques valeurs de la fonction exponentielle

On peut définir la fonction exponentielle comme l'unique fonction qui satisfait la formule d'addition

$$e^{x+y} = e^x e^y,$$

pour x et y deux nombres réels et qui de plus prend la valeur e en $x = 1$. On retiendra que

$$e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e \simeq 2,718281828.$$

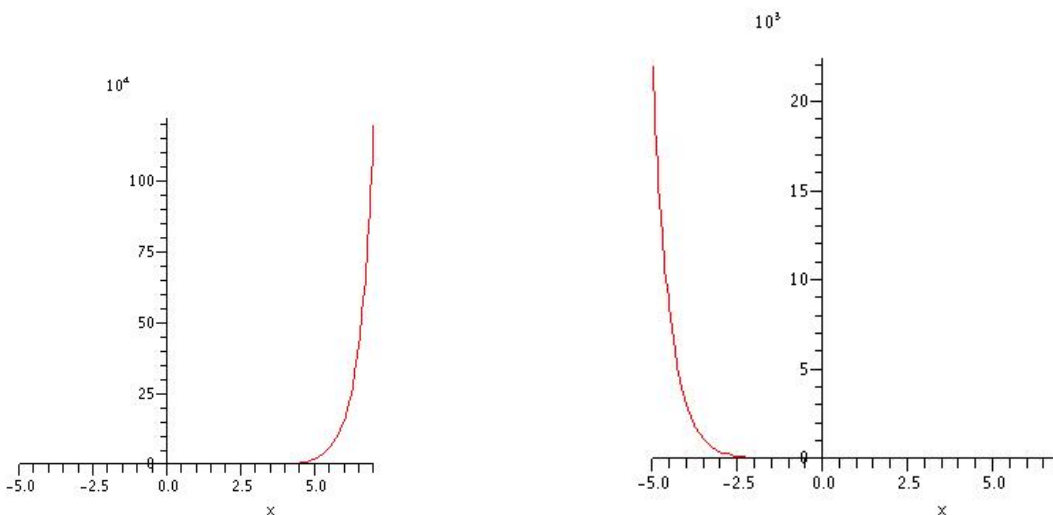
Le nombre e est de plus la valeur limite de la suite $(1 + 1/n)^n$, il s'agit comme π d'un nombre transcendant (voir la remarque 8). On peut remarquer également que, d'après la formule d'addition, pour x donné, on a

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = 1,$$

d'où

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Les graphes des autres fonctions de type exponentielle qui à x associent ae^{bx} , où a et b sont des nombres donnés, se déduisent du graphe de la fonction exponentielle moyennant des changements d'unité en x et y et des symétries par rapport à l'axe horizontal et l'axe vertical selon les signes de a et b .

FIG. 2 – Graphes des fonctions qui à x associent ae^{bx} , cas $a > 0, b > 0$ et $a > 0, b < 0$.

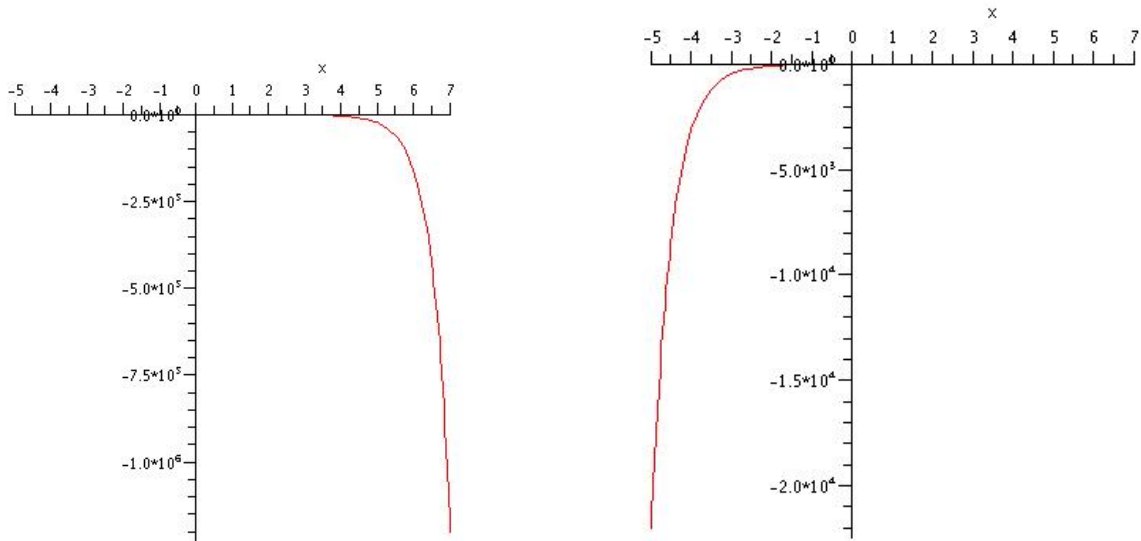


FIG. 3 – Graphes des fonctions qui à x associent ae^{bx} , cas $a < 0, b > 0$ et $a < 0, b < 0$.

Une propriété importante de la fonction exponentielle est d'être égale à sa dérivée, on a donc

$$(e^x)' = e^x \quad \text{et} \quad (ae^{bx})' = bae^{bx}.$$

En utilisant les formules d'addition, on voit facilement que pour x donné, $e^{x+1} = e \times e^x$, autrement dit l'accroissement d'une unité de la variable entraîne la multiplication de la fonction par le nombre e . On voit donc comment généraliser la fonction exponentielle de base e en définissant une fonction pour laquelle un accroissement d'une unité de la variable entraîne la multiplication de la fonction par un nombre réel strictement positif a donné. Une telle fonction se note a^x et s'appelle **exponentielle de base a**. Cette fonction est croissante si a est strictement supérieur à 1, constante si $a = 1$ et décroissante si $a < 1$.

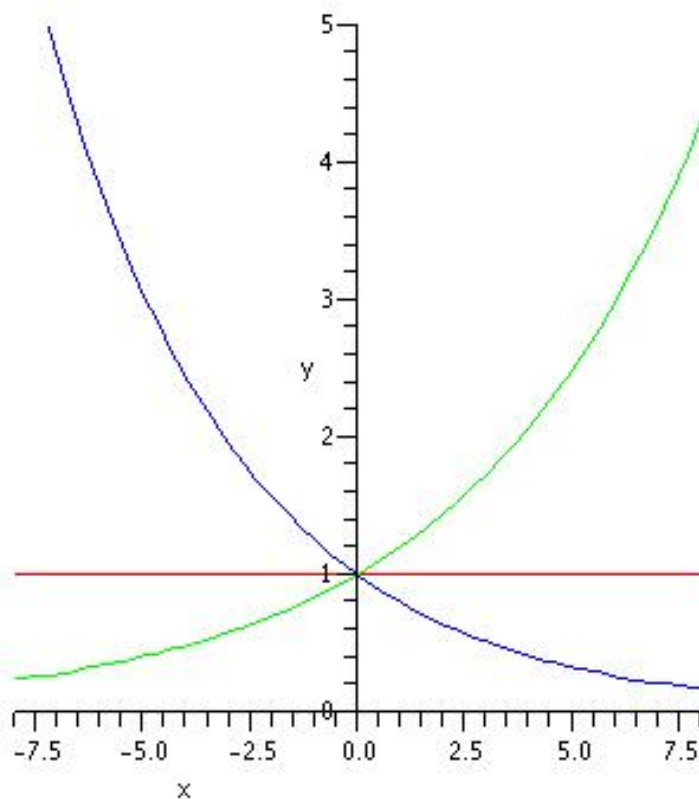


FIG. 4 – Graphes des fonctions qui à x associent a^x , cas $a < 1$ en bleu, $a = 1$ en rouge et $a > 1$ en vert.

4.2 Fonctions réciproques

Definition 31 On appelle **fonction réciproque** (quand elle existe) de la fonction f qui à x associe $y = f(x)$, la fonction qui à y associe $x = g(y)$ telle que

$$x \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow x = g(f(x))$$

et

$$y \longrightarrow x = g(y) \longrightarrow y = f(g(y)).$$

Une fonction f n'a pas toujours de fonction réciproque uniquement définie. Prenons l'exemple de la fonction représentée sur la figure 5. À x et x' , on associe $f(x)$ et $f(x')$ qui sont égaux, mais si la fonction réciproque de cette fonction existe, quelle valeur lui donne-t-on en $f(x) = f(x')$? x ou x' ?

Cependant si f est strictement croissante ou strictement décroissante, c'est-à-dire si la dérivée de f est strictement positive ou strictement négative alors f possède une fonction réciproque g que l'on note parfois f^{-1} (**attention** cette fonction n'a souvent aucun rapport avec $1/f$).

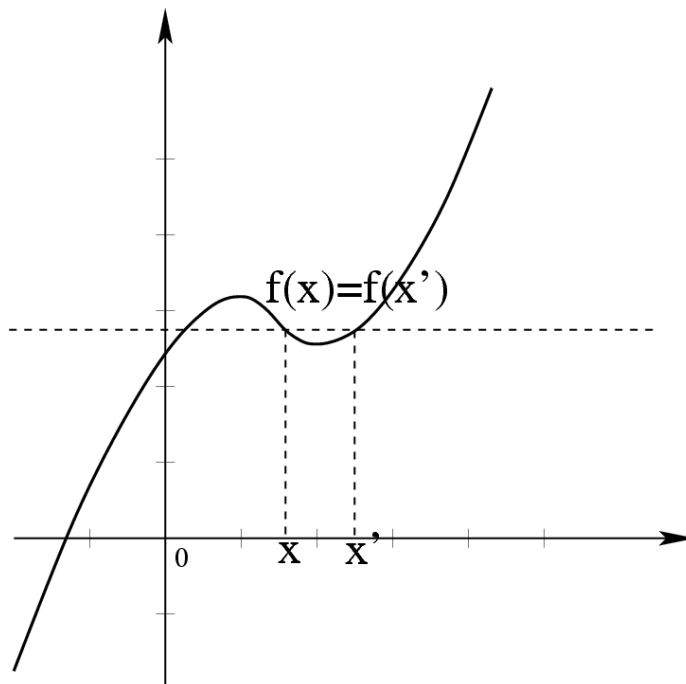


FIG. 5 – Un exemple de fonction posant un problème pour définir la fonction réciproque.

On a les propriétés suivantes : Les graphes d'une fonction qui à x associe $f(x)$ et de sa fonction réciproque qui à y associe $g(y) = f^{-1}(y)$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice) et la dérivée de g au point $y = f(x)$ est l'inverse de la dérivée de f au point x ,

$$g'(y) = 1/f'(x) = 1/f'(f^{-1}(y)).$$

4.3 Fonctions logarithmes

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, sa dérivée étant égale à elle-même donc strictement positive, elle possède une fonction réciproque qui à un nombre réel strictement positif y associe un nombre x dont l'exponentiel est égal à y . On appelle cette fonction le logarithme (de base e), on le note \ln (ou parfois $\text{Log}(y)$). Le graphe du logarithme est le symétrique du graphe de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice.

Remarque 16 *Le terme \ln est l'abréviation de logarithme népérien en hommage au mathématicien écossais John Napier qui est à l'origine des premières tables logarithmiques. Celles-ci ne furent cependant pas des tables de logarithmes népériens. On date en général la naissance des logarithmes népériens de 1647, dans les travaux de Grégoire de Saint-Vincent. La fonction \ln s'est appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique.*

La fonction logarithme népérien est une fonction strictement croissante, définie pour x strictement positif seulement et qui prend pour x petit des valeurs négatives très grandes. On a

$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1.$$

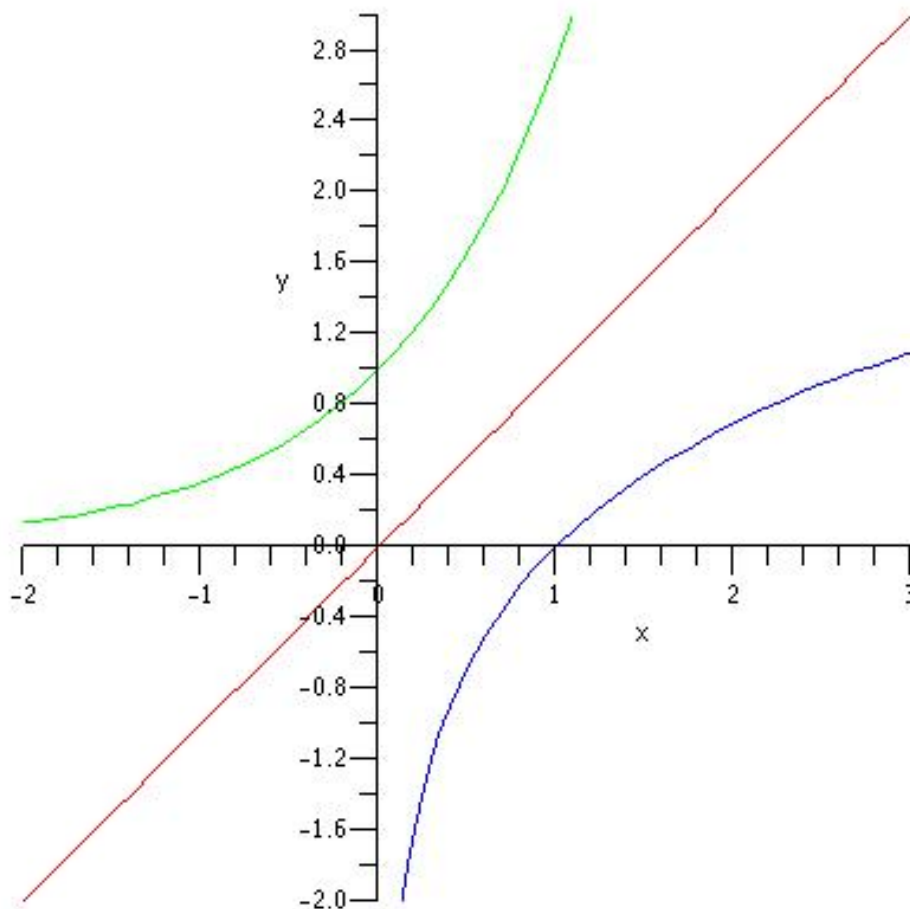


FIG. 6 – Graphes des fonctions logarithme, en bleu, exponentielle, en vert et première bissectrice en rouge.

De plus à la formule d'addition de l'exponentielle, correspond pour le logarithme les formules suivantes, pour u et v deux nombres strictement positifs et n un entier :

$$\begin{aligned}\ln(uv) &= \ln u + \ln v, \\ \ln(u/v) &= \ln u - \ln v, \\ \ln(u^n) &= n \ln u.\end{aligned}$$

Ces formules indiquent que la fonction \ln transforme les produits, rapports et exponentiations en sommes, différences et multiplications. C'est la raison pour laquelle cette fonction a été longtemps utilisée comme outils de calcul "à la main". Ce rôle est quelque peu effacé aujourd'hui par l'usage des calculatrices et des ordinateurs.

Exercice 6 1. Calculer $\ln 6$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

2. Calculer, en fonction de $\ln 10$, $\ln 100$, $\ln 1000$, $\ln 100000 - \ln 10000$.

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de l'exponentielle de base e et on a, de même, des fonctions logarithmes de base a , notées \ln_a ou parfois \log_a , qui sont

les fonctions réciproques des fonctions exponentielles de base a . On a donc pour x donné strictement positif

$$\ln_a(a^x) = x$$

et

$$a^{\ln_a x} = x.$$

La plus connue des fonctions logarithmes de base différente de e est la fonction logarithme de base 10 encore appelée logarithme décimal ou logarithme vulgaire. On a

$$\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \ln_a a = 1, \quad \ln_a 1 = 0.$$

De plus, on déduit des formules précédentes que

$$\ln_a(a^x) = \frac{\ln a^x}{\ln a} = x,$$

ce qui donne

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

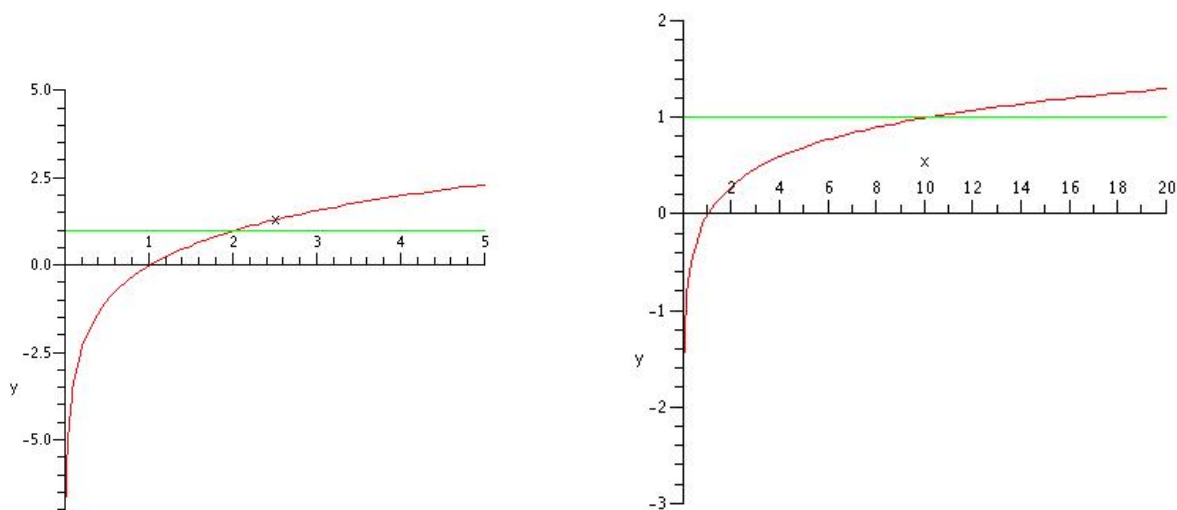


FIG. 7 – Graphes des fonctions \ln_a , pour $a = 2$ et $a = 10$.

Il reste maintenant à calculer la dérivée d'une fonction logarithmique, pour cela il suffit d'appliquer la formule donnant la dérivée de la fonction réciproque. On a, pour y strictement positif,

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Soit u est une fonction qui à y associe $u(y)$ possédant une dérivée et telle que $u(y) > 0$ pour tout y , notons f la fonction qui à y associe $f(y) = \ln(u(y))$, on a en appliquant les résultats de la section 2.1.2 :

$$f'(y) = \frac{u'(y)}{u(y)},$$

enfin on a

$$(\ln_a)'(y) = \frac{(\ln)'(y)}{\ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

4.4 Dérivée logarithmique et élasticité

Definition 32 Soit f une fonction possédant une dérivée, on appelle **dérivée logarithmique** de f au point x , le rapport $f'(x)/f(x)$ (à condition que $f(x)$ soit non nul). Quand la fonction est toujours strictement positive, il s'agit de la dérivée de la fonction qui à x associe $\ln(f(x))$.

Definition 33 Soit f une fonction possédant une dérivée, on appelle **élasticité** de f au point x , le produit de x et de sa dérivée logarithmique que l'on note $e(f)(x)$ (à condition que $f(x)$ soit non nul). On a donc $e(f)(x) = xf'(x)/f(x)$.

Remarque 17 Attention à ne pas confondre la notation de l'exponentielle et de l'élasticité ! $e(f)$ correspond à l'élasticité de f et surtout pas à l'exponentielle de f .

Exemple 34 Donnons trois exemples :

- L'élasticité des fonctions puissances g_r qui à x associent $g_r(x) = x^r$ est constante et égale à r , en effet

$$e(g_r)(x) = x \frac{g_r'(x)}{g_r(x)} = x \frac{rx^{r-1}}{x^r} = r.$$

- Les fonctions exponentielles de base a ont une élasticité linéaire, en effet

$$x \frac{(a^x)'}{a^x} = x \frac{\ln a a^x}{a^x} = \ln a x.$$

- Les fonctions logarithmes ont pour élasticité la fonction qui à x associe $1/\ln x$, en effet

$$x \frac{(\ln_a)'(x)}{\ln_a x} = \frac{x}{x \ln a \ln_a x} = \frac{1}{\ln x}.$$

On peut aussi écrire l'élasticité sous la forme suivante, en utilisant le fait que $f'(x) = (df/dx)(x)$,

$$e(f) = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f}{x}}.$$

Sous cette forme, on voit que l'élasticité mesure le rapport de l'accroissement relatif de y sur l'accroissement relatif de x , c'est-à-dire que l'élasticité mesure la variation en pourcentage de y correspondant à une variation de 1% de x . C'est sous cette forme que l'élasticité est fréquemment utilisée en économie, par exemple pour calculer les variations des fonctions d'offre ou de demande consécutives à une variation de 1% du prix.

4.5 Croissances comparées pour des grandes valeurs de x

Nous avons vu sur le graphe 6 que la fonction exponentielle croît beaucoup plus vite que la fonction logarithme, il reste juste à comparer ces deux fonctions avec les fonctions puissances qui, pour n un entier donné strictement positif, à x associent x^n . Le résultat est le suivant : La fonction exponentielle croît plus vite que toutes les fonctions puissances et la fonction logarithme croît moins vite que toutes les fonctions puissances.

Chapitre 5

Croissances linéaires et exponentielles

5.1 Progressions arithmétiques et géométriques

Definition 35 Une progression arithmétique est une suite de nombres formée en ajoutant une même quantité (positive ou négative) à chaque terme pour obtenir le terme suivant. Le nombre r ajouté à chaque étape s'appelle **la raison** de la progression.

Si la raison est positive, la progression est croissante.

Si la raison est négative, la progression est décroissante.

À titre d'exemple, la progression arithmétique de 5 termes dont la raison est 3 et le premier terme est 12 est : 12, 15, 18, 21, 24.

Si on repère dans le plan les points de coordonnées (1, 12), (2, 15), (3, 18), (4, 21), (5, 24), on constate qu'ils sont situés sur une droite (voir la figure 1). On observe donc qu'une **progressions arithmétique correspond à une croissance (ou une décroissance) linéaire.**

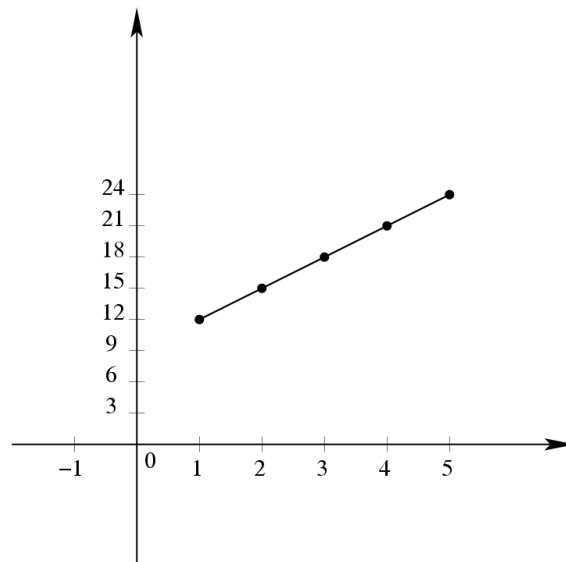


FIG. 1 – Exemple de progression arithmétique.

Le $n+1$ -ième terme d'une progression arithmétique de raison r , $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ vérifie la formule

$$x_n = x_0 + nr.$$

La somme des $(n+1)$ premiers termes est

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{j=0}^n x_j = \frac{n+1}{2}(2x_0 + nr).$$

Exemple 36 Une somme x_0 placée à intérêts simples, c'est-à-dire que les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour devenir à leur tour productifs d'intérêts, évoluerait de la façon suivante, pour un taux d'intérêt de $r\%$ l'an :

Capital initial :	x_0 ,
Capital au bout de la première année :	$x_0 + r x_0/100$,
Capital au bout de la deuxième année :	$x_0 + 2r x_0/100$,
Capital au bout de la troisième année :	$x_0 + 3r x_0/100$,
Capital au bout de la n -ième année :	$x_0 + nr x_0/100$.

Definition 37 Une progression géométrique est une suite de nombres formée en multipliant par une même quantité (positive ou négative) chaque terme pour obtenir le terme suivant. Le facteur constant par lequel on multiplie s'appelle **la raison** de la progression.

Si la raison est positive et supérieure à 1, la progression est croissante.

Si la raison est positive et inférieure à 1, la progression est décroissante.

À titre d'exemple, la progression géométrique de 5 termes dont la raison est 3 et le premier terme est 12 est : 12, 36, 108, 324, 972.

Si on repère dans le plan les points de coordonnées $(1, 12)$, $(2, 36)$, $(3, 108)$, $(4, 324)$, $(5, 972)$, on constate qu'ils sont situés sur une courbe qui croît très vite (voir la figure 2) : c'est une courbe exponentielle. On observe donc qu'une **progressions géométrique correspond à une croissance (ou une décroissance) exponentielle.**

Le $n+1$ -ième terme d'une progression géométrique de raison r , $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ vérifie la formule

$$x_n = x_0 r^n.$$

La somme des $(n+1)$ premiers termes, pour r différent de 1, est

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{j=0}^n x_j = x_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

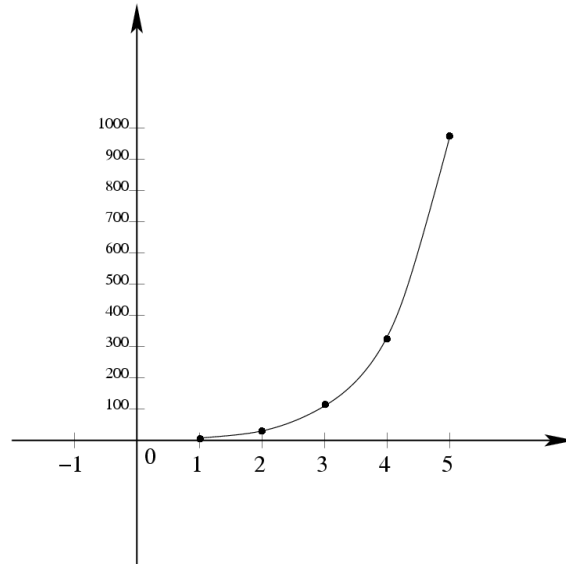


FIG. 2 – Exemple de progression géométrique.

Exemple 38 Une culture de bactéries dont le nombre double chaque minute évoluera de la façon suivante :

Effectif initial :	10000,
Effectif après une minute :	20000,
Effectif après deux minutes :	40000,
Effectif après trois minutes :	80000,
Effectif après n minutes :	$2^n \times 10000$.

Il s'agit d'une progression géométrique de premier terme 10000 et de raison 2.

5.2 Croissance exponentielle, croissance linéaire, taux de croissance

Les phénomènes qui obéissent à des croissances exponentielles sont extrêmement fréquents et il convient de savoir les reconnaître et en particulier de les distinguer des phénomènes soumis à une croissance linéaire.

Une croissance exponentielle est une croissance qui fait “boule de neige”, c'est-à-dire une croissance proportionnelle à la quantité atteinte, ou, si on préfère, dont l'accroissement relatif (en pourcentage) est constant par exemple de $x\%$ par an. Elle correspond à une progression géométrique dont la raison est le facteur (en principe constant) par lequel la quantité est multipliée à chaque étape.

Il ne faut pas confondre la raison de la progression avec le taux de croissance τ , par définition, le **taux de croissance** d'un phénomène qui passe de l'état x_n à l'étape n à l'état x_{n+1} à l'étape $n + 1$ est le rapport

$$\tau = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1.$$

Dans le cas d'une progression géométrique de raison r , on a

$$\tau = \frac{x_0 r^{n+1} - x_0 r^n}{x_0 r^n} = \frac{r^{n+1} - r^n}{r^n} = r - 1.$$

Donnons maintenant quelques exemples de phénomène présentant une croissance exponentielle :

1. Un capital placé à $r\%$ l'an et soumis à la règle des intérêts composés.
2. Le produit d'une nation dont une part est réinvestie et devient donc à son tour productive.
3. Les recettes d'une entreprise qui réinvestit une part de ses bénéfices.
4. Une population dont les individus se reproduisent, les descendants ayant à leur tour des descendants.
5. Le nombre de malades atteints lors d'une épidémie, les nouveaux malades étant eux-mêmes des vecteurs de la maladie.

Comme le taux de croissance τ et la raison de la progression r sont liés par la formule $\tau = r - 1$, on peut, par exemple, affirmer qu'une population qui double chaque année (la raison est donc $r = 2$) a un taux de croissance de 1, soit un taux de croissance de 100%.

Pour tout phénomène soumis à une croissance exponentielle, on dispose d'une équation reliant l'état initial x_0 , l'état atteint après n étapes x_n et le taux de croissance

$$x_n = x_0 r^n \quad \text{ou} \quad x_n = x_0 (1 + \tau)^n.$$

Cette équation reliant entre elles trois quantités x_0 , x_n et τ (ou r) permet dans tous les cas de calculer le troisième lorsque l'on connaît les deux autres. On peut donc résoudre trois types de problèmes :

1. Déterminer l'état atteint après n étapes lorsque l'on connaît l'état initial et le taux (ou la raison).
2. Déterminer le taux (ou la raison) lorsque l'on connaît l'état initial et l'état atteint après n étapes.
3. Déterminer l'état initial lorsque l'on connaît le taux (ou la raison) et l'état atteint après n étapes.

Exercice 7 1. *Quelle sera au bout de 15 années une population de 1234 éléments qui croît exponentiellement avec un taux annuel de 2% ?*

Il s'agit d'un problème du type 1, la population x_{15} au bout de 15 années sera

$$x_{15} = 1234 \times (1 + 0.02)^{15} \simeq 1661.$$

2. *Étant donné un phénomène évoluant exponentiellement qui est passé en 5 ans de la valeur 1275 à la valeur 2550, trouver le taux de croissance.*

C'est un problème de type 2. Le taux de croissance τ satisfait l'équation

$$2537 = 1275(1 + \tau)^5,$$

d'où

$$(1 + \tau)^5 = \frac{2550}{1275} = 2.$$

Pour résoudre cette équation, on utilise les logarithmes (ou la racine cinquième), on a $\ln(1 + \tau)^5 = \ln 2$, soit encore $5 \ln(1 + \tau) = \ln 2$, finalement

$$\tau = e^{(\ln 2)/5} - 1 \simeq 0.1487.$$

3. Étant donnée une population de 60 millions d'individus, qui a crû au taux de 20 pour 1000 par an. Quelle était cette population il y a 12 ans ?

C'est un problème de type 3. On a

$$x_0(1 + 0.02)^{12} = 50000000,$$

donc

$$x_0 = \frac{60000000}{(1 + 0.02)^{12}} \simeq 47309591.$$

Revenons maintenant au cas d'une croissance linéaire, contrairement à une croissance exponentielle, c'est une croissance qui ne s'emballe pas : elle reste constante à elle-même et sa progression n'est pas fonction de la valeur atteinte par ses termes.

Donnons quelques exemples de phénomène présentant une croissance linéaire :

1. Un capital placé à "intérêts simples", c'est-à-dire que les intérêts acquis ne peuvent pas à leur tour devenir productifs d'intérêts.
2. Un budget qui augmente d'une quantité fixe à intervalles réguliers,
3. Les recettes d'une entreprise en l'absence d'investissement.

Remarque 18 Si l'on compare deux phénomènes croissants (ou décroissants) dont l'un est soumis à une croissance linéaire et l'autre à une croissance exponentielle, le second finira toujours par dépasser le premier même s'il se peut que le premier semble progresser plus vite durant les premières périodes.

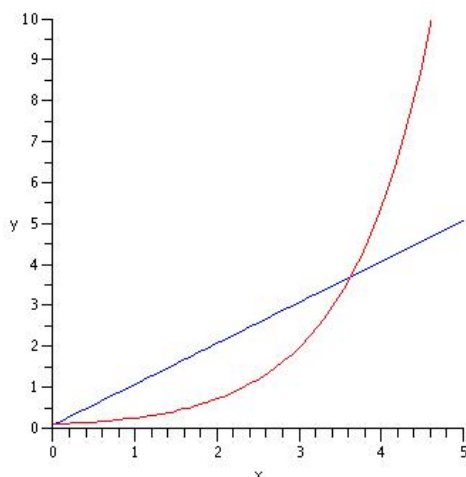


FIG. 3 – Croissance exponentielle en rouge et linéaire en bleu

5.3 Échelles logarithmiques

Lorsque l'on représente des points dans le plan ou des graphes de fonctions, on adopte généralement une échelle arithmétique, ou linéaire, sur les axes de coordonnées, c'est-à-dire qu'on a porté sur chacun des axes des **graduations d'égale longueur** correspondant aux accroissements de la variable ou de la fonction, et on passe d'une graduation à une autre en ajoutant une quantité fixe. Malheureusement, dans une représentation de ce type, les petites variations sont indiscernables. Prenons un exemple, imaginons qu'un village ayant très peu d'habitants voit d'un seul coup une arrivée massive d'habitants, sa population suit l'évolution suivante :

Effectif initial :	2,
Effectif après une année :	2,
Effectif après deux années :	4,
Effectif après trois années :	100,
Effectif après quatre années :	1000,
Effectif après cinq années :	10000.

Si on représente cette évolution, on obtient le graphique 4 qui montre clairement que les petites variations de départ sont indiscernables.

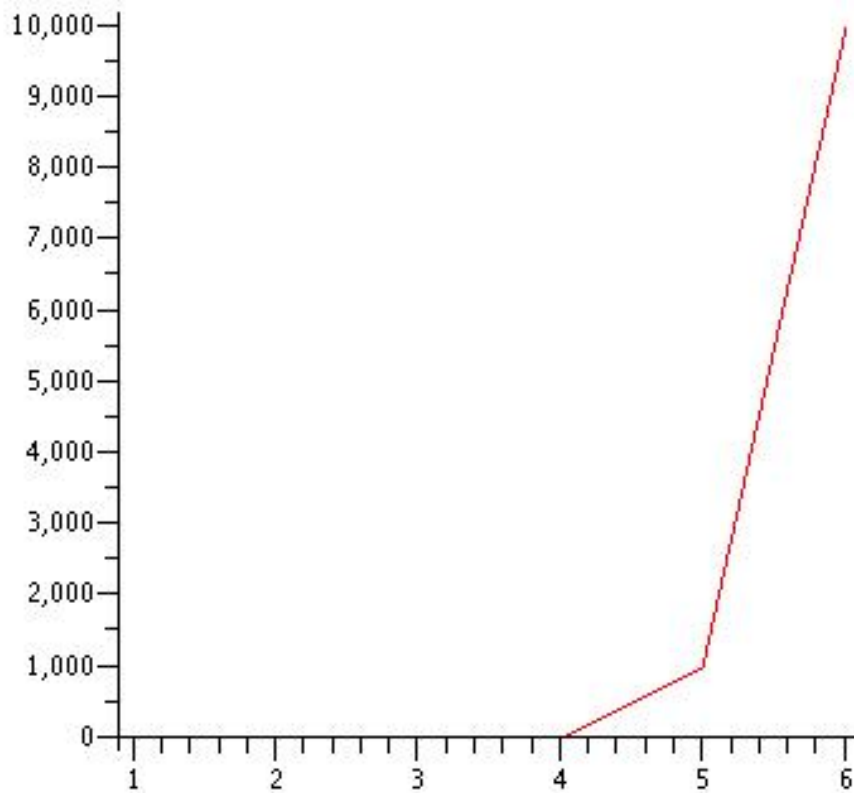


FIG. 4 – Évolution d'une population.

Elles sont indiscernables pour une raison simple : on passe d'une graduation à une autre en ajoutant une quantité fixe, par exemple sur la figure 4, cette quantité vaut 500 ; ce choix a été fait pour que la valeur 10000 puisse être sur le graphique. À partir de là, 2, 4 et 100, sont très difficiles à discerner.

Pour pouvoir discerner les petites variations, on va utiliser une **échelle logarithmique** qui va espacer les valeurs faibles et rapprocher les valeurs fortes. Regardons comment créer cette échelle avec le logarithme népérien : on représente 1 au point d'abscisse $\ln 1 = 0$ qui constitue donc l'origine du nouveau repère, 10 est représenté au point d'abscisse $\ln 10$, 100 est représenté au point d'abscisse $\ln 100$... Plus généralement, x strictement positif est représenté au point d'abscisse $\ln x$ (si x est plus petit que 1, il sera représenté sur la partie négative). On peut remarquer que la distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 ou 100 de 1000 car

$$\ln(1000) - \ln(100) = \ln(100) - \ln(10) = \ln(10) - \ln(1),$$

ainsi les écarts entre les graduations ne sont pas tous égaux, c'est ce qui va nous permettre d'espacer les valeurs faibles et rapprocher les valeurs fortes. Avec les valeurs données dans le tableau suivant :

Valeur exacte	$\ln 2$	$\ln 10$	$\ln 10000 = 4 \ln 10$
Valeur approchée	0.6931471806	2.302585093	9.210340372

on obtient, pour les mêmes données que précédemment, le graphe 5 qui utilise une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

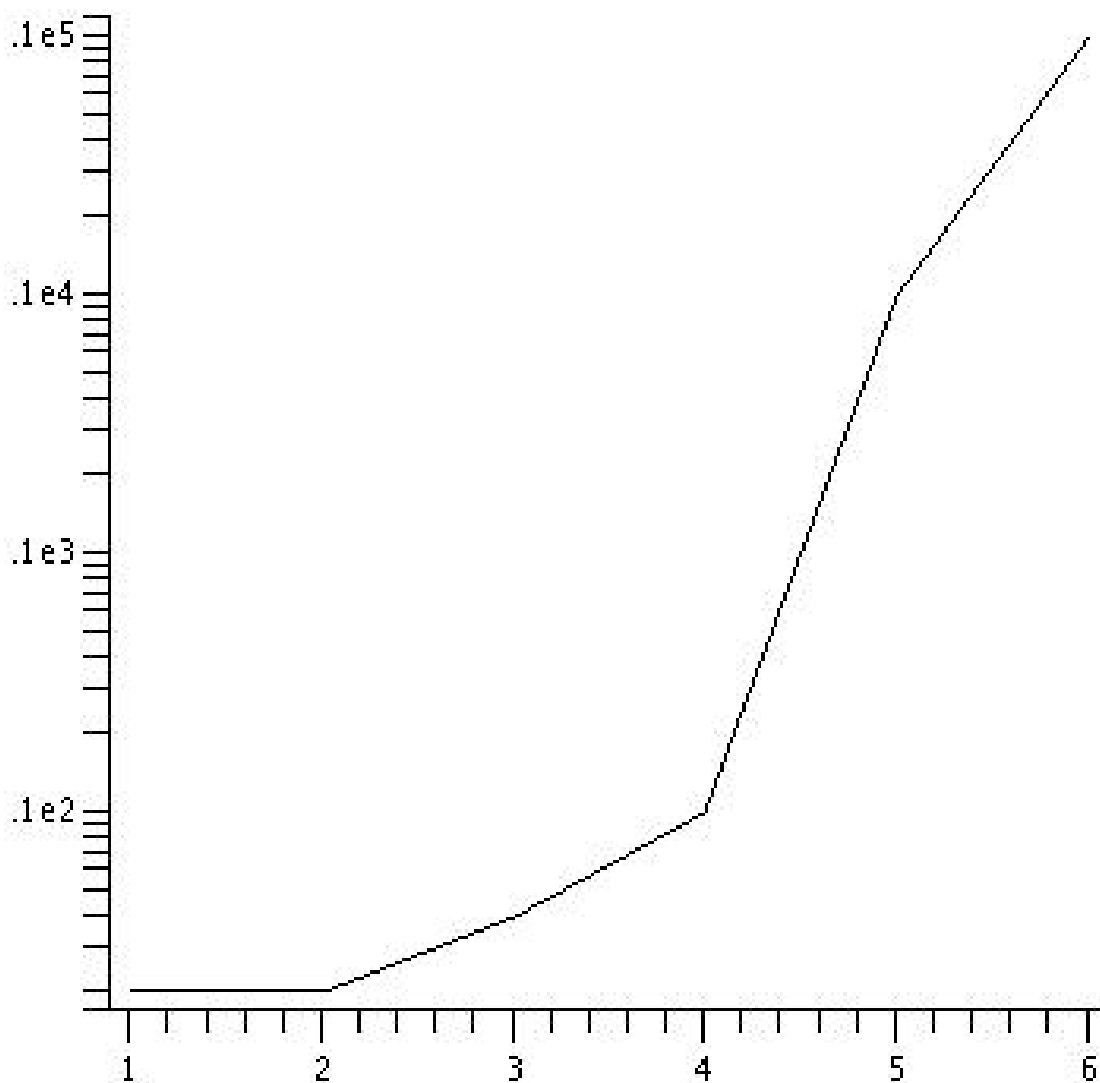


FIG. 5 – Évolution d'une population sur une aute échelle.

Remarque 19 *Ce que nous venons de faire avec le logarithme népérien peut aussi se faire avec n'importe quel logarithme de base a . On remplace dans ce cas le logarithme népérien par le logarithme de base a .*

Definition 39 On appelle repère semi-logarithmique un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des abscisses, est gradué selon une échelle linéaire, alors que l'autre axe, ici celui des ordonnées, est gradué selon une échelle logarithmique.

Si l'on représente sur un repère semi-logarithmique la fonction exponentielle de base a et que l'échelle logarithmique est construite avec le logarithme de base a , on obtient une droite, ici la première bissectrice. La figure 6 présente le cas de la fonction exponentielle de base e .

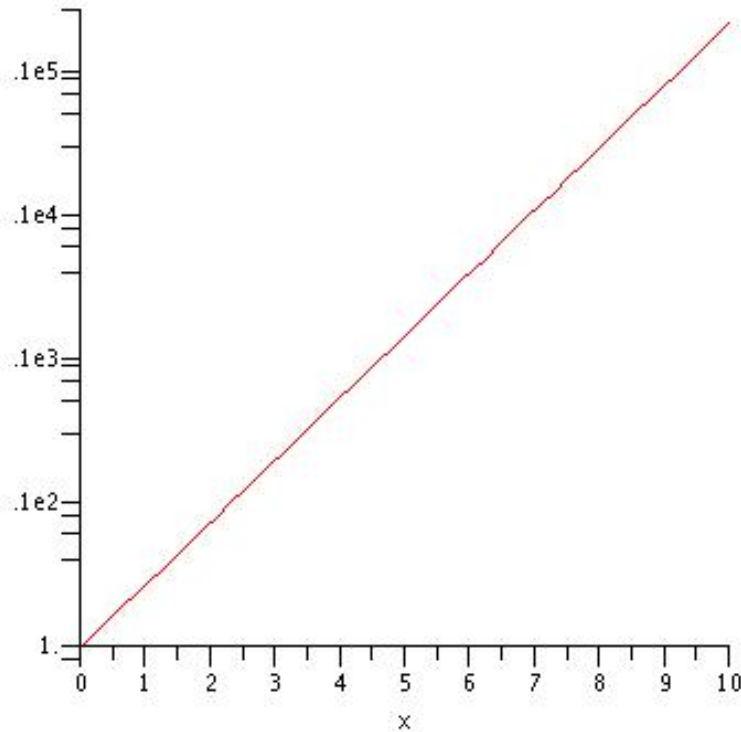


FIG. 6 – Graphe de la fonction exponentielle sur un repère semi-logarithmique.

Exercice 8 Soient p et q deux nombres donnés, que donnerait la représentation de la fonction qui à x associe $a^{(px+q)}$ sur ce repère semi-logarithmique ? (**Réponse** : Une droite dont la pente vaut p et l'ordonnée à l'origine vaut a^q . Des exemples sont portés sur la figure 7).

Definition 40 On appelle repère log-log un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

Sur un repère log-log avec une échelle logarithmique construite avec le logarithme de base a , la fonction puissance qui à x associe x^r donne une droite de pente r . Plus généralement les graphes des fonctions qui à x associent kx^r seront des droites de pente r et d'ordonnée à l'origine k . On peut voir quelques exemples sur la figure 8.

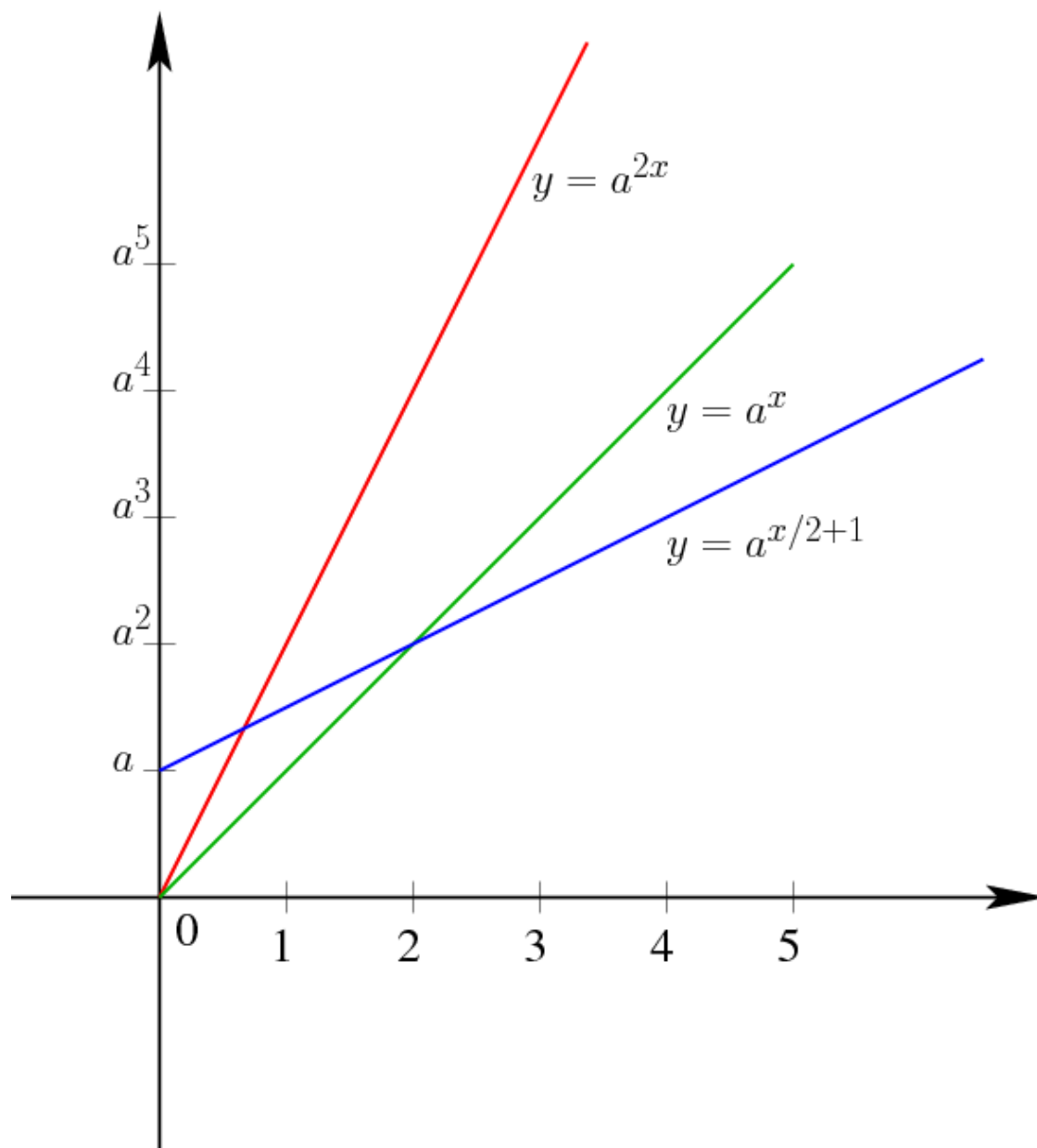


FIG. 7 – Graphe de fonctions exponentielles sur un repère semi-logarithmique.

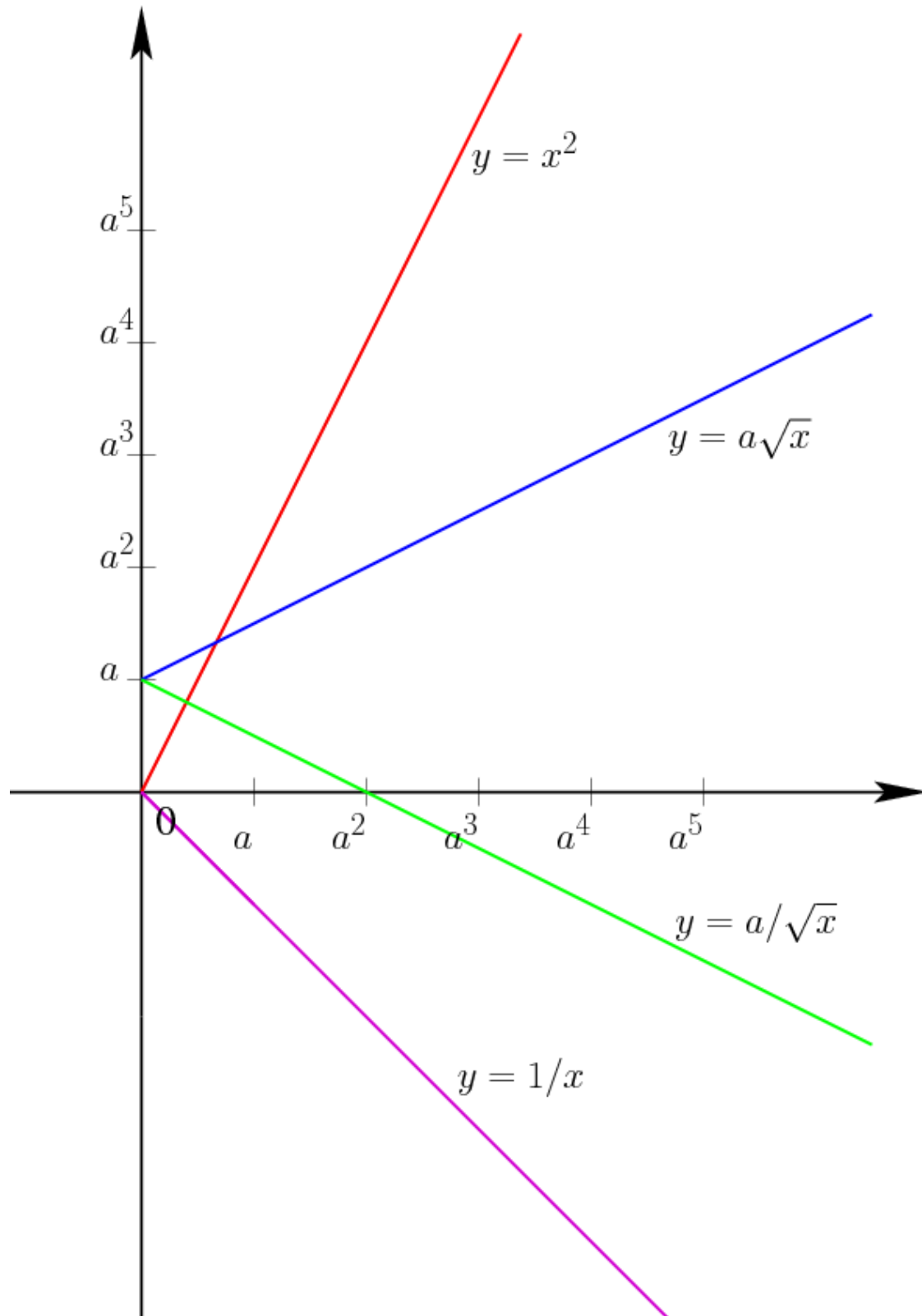


FIG. 8 – Quelques fonctions sur un repère log-log.

Chapitre 6

Intégrale d'une fonction d'une variable

L'opération d'intégration d'une fonction, ou de calcul d'une primitive d'une fonction, que nous allons étudier dans ce chapitre, est en quelque sorte l'opération inverse de la dérivation.

6.1 Primitives d'une fonction d'une variable

Definition 41 Soient a, b deux nombres réels donnés tels que $a < b$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Une fonction F définie également sur $[a, b]$ et possédant une dérivée est appelée une **primitive** de f si on a $F'(x) = f(x)$ pour tout x appartenant à $[a, b]$.

Exemple 42 La fonction qui à x associe $F(x) = x^2 + 2x - 5$ est une primitive de la fonction qui à x associe $f(x) = 2x + 2$.

Regardons déjà quelques propriétés :

1. Si une fonction possède une primitive, elle en possède une infinité qui diffèrent les unes des autres par des constantes.

En effet, si F est une primitive de f alors $F + 1$ ou $F + 10$ sont aussi des primitives de f . Réciproquement, si F et \hat{F} sont deux primitives de f alors

$$(F - \hat{F})' = F' - \hat{F}' = f - f = 0,$$

la fonction $F - \hat{F}$ a une dérivée nulle, c'est donc une constante.

2. A une constante près, la primitive d'une somme est la somme des primitives,
3. A une constante près, la primitive de la multiplication par une constante λ est le produit de la primitive par ce nombre.

Voyons maintenant comment calculer des primitives.

6.1.1 Calcul de primitives

Comme dans la section 2.1.2, pour calculer la primitive d'une fonction, on commence par utiliser les primitives de fonctions usuelles, que nous allons présenter dans le tableau 1.

Fonction qui à x associe	Domaine de définition	Primitive (C est une constante qui dépend de l'intervalle considéré)
$f(x) = 0$	\mathbb{R}	$F(x) = C$
$f(x) = k$, k est un nombre réel donné	\mathbb{R}	$F(x) = kx + C$
$f(x) = kx^n$, n est un entier positif ou nul	\mathbb{R}	$F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{k}{x^n}$, n est un entier, $n > 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{k}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$]0, +\infty[$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = e^{kx}$, k est un nombre réel non nul donné	\mathbb{R}	$F(x) = \frac{e^{kx}}{k} + C$
$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$ et différent de 1	\mathbb{R}	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$

TAB. 1 – Primitives de fonctions usuelles.

Remarque 20 1. Quand la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la constante C n'est pas nécessairement la même sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. Concernant la primitive de la fonction qui à x associe kx^n , on peut étendre le résultat à kx^α avec $\alpha \neq -1$. Dans ce cas, la primitive est donnée par la fonction qui à x associe

$$F(x) = \frac{kx^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Mais il faut être très prudent sur le **domaine de définition de la fonction** en fonction de α .

Exercice 9 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4 - 3x^2$,

Réponse : $F(x) = 4x - x^3 + C$,

2. $f(x) = (x - 6)^2$,

Réponse : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 36x + C$,

3. $f(x) = |x|$,

Réponse :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + C & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il existe également quelques règles de calcul de primitives. Par exemple, si la fonction g dont on cherche une primitive s'écrit sous la forme $g = f(u) \times u'$, avec f et u deux fonctions, u possédant une dérivée, alors une primitive G de g est la fonction qui à x associe

$$G(x) = F(u(x)) + C,$$

F étant une primitive de f . C'est une simple conséquence des résultats de la section 2.1.2.

Exemple 43

La fonction g qui à x associe

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 3},$$

s'écrit, si on note u la fonction qui à x associe $x^2 + 3$ et f la fonction qui à x associe $1/x$,

$$g(x) = f(u(x))u'(x).$$

On en déduit qu'une primitive de g est la fonction qui à x associe

$$G(x) = \ln(x^2 + 3) + C.$$

Exercice 10 Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant sur quel(s) domaine(s) :

1. $f(x) = \frac{2}{2x + 5}$,

Réponse : $F(x) = \ln |2x + 5| + C$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$.

$$2. f(x) = \frac{3}{2x+5},$$

$$\text{Réponse : } F(x) = \frac{3}{2} (\ln|2x+5| + C) \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-5/2\}.$$

$$3. f(x) = xe^{x^2/2},$$

$$\text{Réponse : } F(x) = e^{x^2/2} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$4. f(x) = xe^{x^2},$$

$$\text{Réponse : } F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2/2} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Il reste une dernière règle à étudier qui sert souvent et que l'on appelle l'intégration par parties.

6.1.2 Intégration par parties

Parfois lorsque l'on ne connaît pas la fonction f comme dérivée d'une fonction F , on peut utiliser la méthode d'intégration par parties pour déterminer une primitive. Soient u et v deux fonctions qui possèdent une dérivée, on sait que

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

On en déduit qu'une primitive de $u'v$ est obtenue en retranchant à uv une primitive de uv' et en ajoutant une constante.

Exemple 44 *On cherche une primitive de la fonction \ln , on se limite donc à $]0, +\infty[$. Posons v la fonction qui à x associe $\ln x$ et u la fonction qui à x associe x , donc $u'(x) = 1$. On a donc $\ln x = v(x)u'(x)$ et $v'(x)u(x) = 1$, on en déduit qu'une primitive de la fonction \ln est la fonction qui à x associe*

$$x \ln x - x + C.$$

Exercice 11 1. Calculer une primitive de la fonction qui à x associe $f(x) = xe^x$,

$$\text{Réponse : } F(x) = (x-1)e^x + C.$$

2. Calculer une primitive de la fonction qui à x associe $f(x) = x^2e^x$,

$$\text{Réponse : } F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

6.2 Applications des primitives au calcul d'aire

Nous allons voir que les primitives du paragraphe précédent fournissent un moyen de calcul d'aire. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on suppose pour l'instant que cette fonction est à valeurs positives ou nulles. Notons $A_a^b(f)$ l'aire de la région du plan comprise entre la courbe de f , les deux verticales $x = a$ et $x = b$, et l'axe des abscisses. Une représentation graphique de cette aire est présentée sur la figure 1.

Nous utiliserons désormais la notation suivante : l'aire $A_a^b(f)$ sera notée

$$\int_a^b f(x)dx.$$

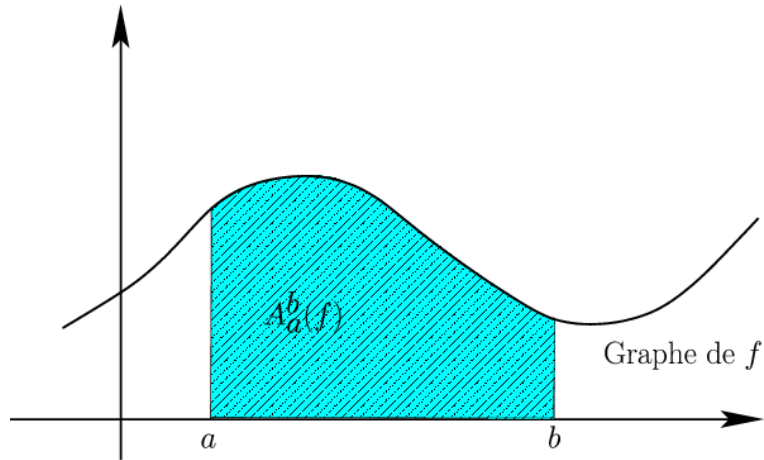


FIG. 1 – Définition graphique d'une aire.

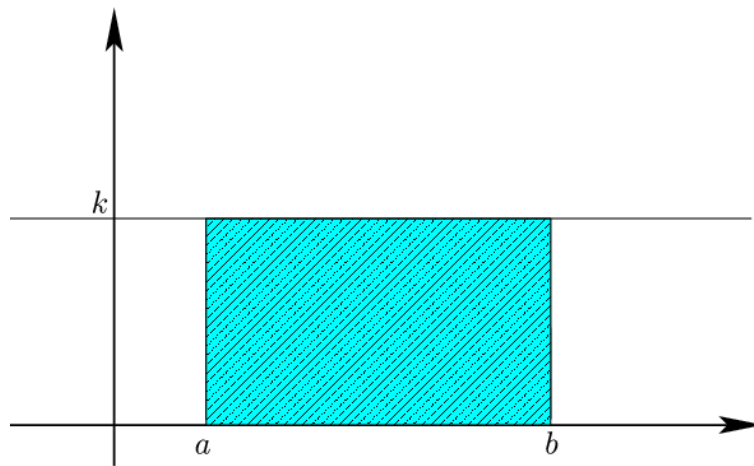


FIG. 2 – Cas d'une fonction constante.

Exemple 45 Donnons deux exemples, si f est une fonction constante égale à $k > 0$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

Si f est la fonction qui à x associe x , en supposant $a > 0$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

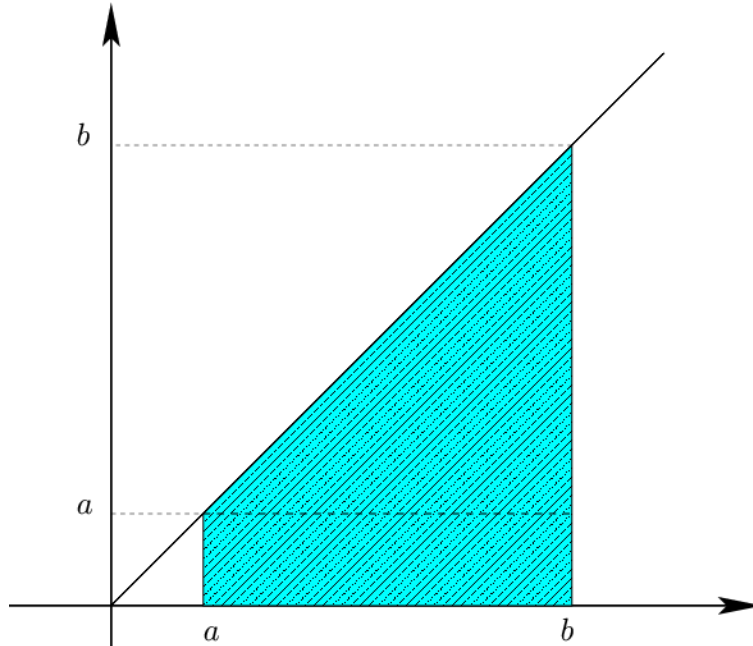


FIG. 3 – Cas de la fonction identité.

Donnons maintenant quelques propriétés :

1. *Propriété d'additivité*, pour c compris entre a et b , on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

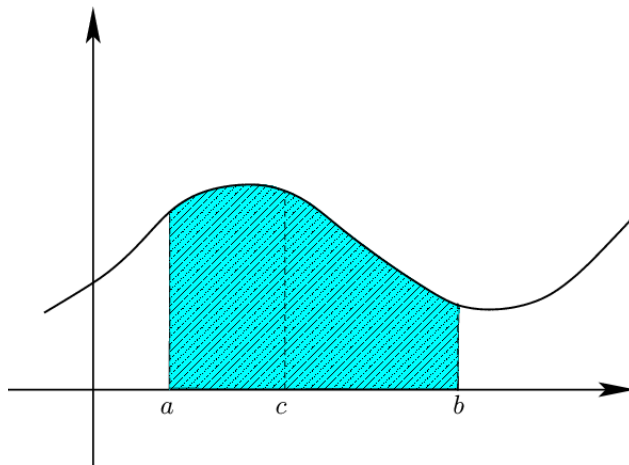


FIG. 4 – Additivité.

2. *Propriété des rectangles*, ou inégalité de la moyenne : si pour tout x appartenant à $[a, b]$, on a $0 \leq m \leq f(x) \leq M$, alors

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

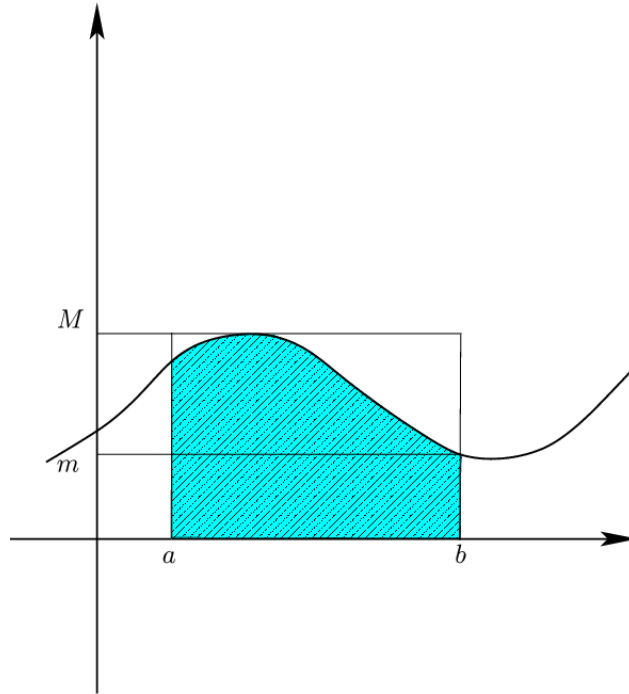


FIG. 5 – Propriété des rectangles.

Il se pose maintenant la question de savoir comment calculer $\int_a^b f(x)dx$ quand f n'est pas une fonction constante ou égale à l'identité. Une première idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ en petits intervalles et d'approcher sur chacun de ces petits intervalles, l'aire par celle d'un rectangle. On introduit donc ce que l'on appelle une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, et on approche ensuite l'intégrale par

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

comme cela est présenté sur la figure 6. Cette méthode de calcul est assez lourde et nous allons voir maintenant l'intérêt des primitives avec la formule fondamentale suivante : Si la fonction f a pour primitive la fonction F sur l'intervalle $[a, b]$ alors, on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

Exemple 46 1. Si la fonction est constante et égale à k ,

$$\int_a^b f(x)dx = kb - ka = k(b - a).$$

2. Si la fonction est la fonction identité alors,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

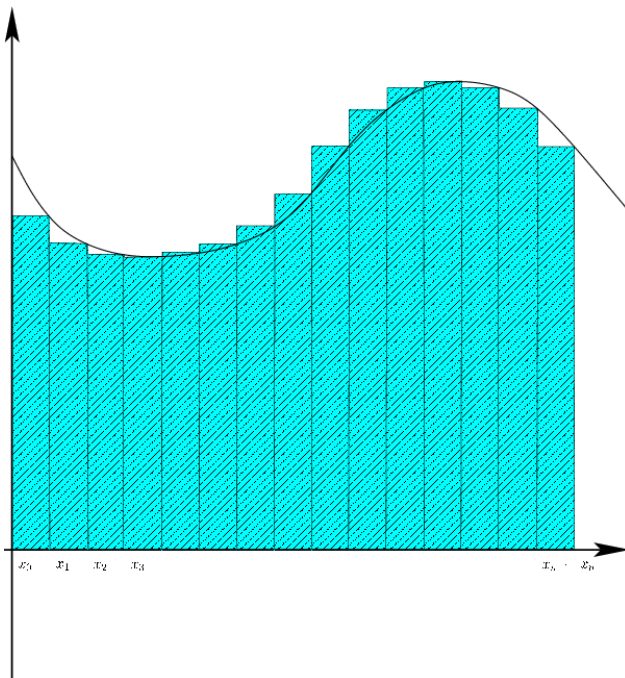


FIG. 6 – Calcul approché d'une intégrale.

La première question que l'on peut se poser est de savoir pourquoi cette formule est vraie, nous allons essayer d'y répondre formellement. Notons G la fonction qui à t associe

$$G(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

A t fixé, $G(t)$ est l'aire de la région du plan comprise entre la courbe de f , les deux verticales $x = a$ et $x = t$, et l'axe des abscisses. Pour δ petit, on a

$$\frac{G(t + \delta) - G(t)}{\delta} = \frac{\int_a^{t+\delta} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} f(x)dx.$$

Comme δ est assez petit, on peut supposer que f est constante sur l'intervalle $[t, t + \delta]$, on a donc

$$\frac{G(t + \delta) - G(t)}{\delta} \simeq \frac{1}{\delta}(t + \delta - t)f(t) = f(t).$$

Ainsi la dérivée de G est f . G diffère donc de F par une constante C et

$$G(a) = 0 = F(a) + C.$$

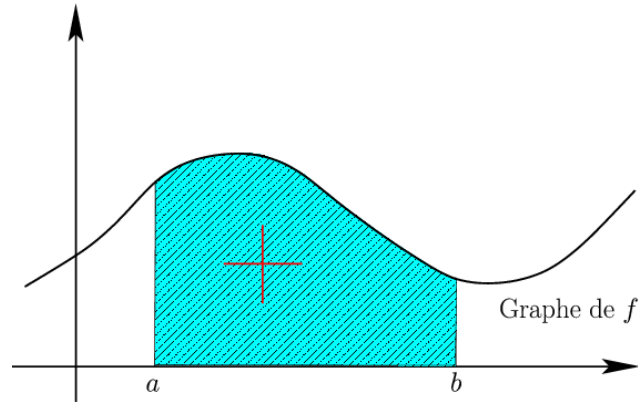
On en déduit que

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Revenons maintenant au cas général où la fonction f n'est plus supposée positive. on arrive à la définition suivante :

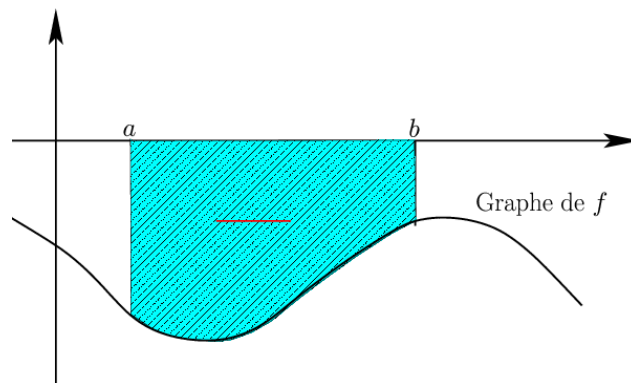
Definition 47 Le symbole $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'**aire algébrique** de la région du plan comprise entre la courbe de f , les deux verticales $x = a$ et $x = b$, et l'axe des abscisses, le signe étant donné par les conventions suivantes :

1. f positive ou nulle,



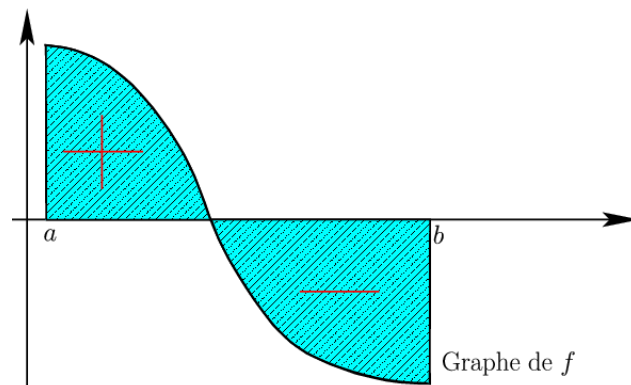
si b est plus petit que a alors $\int_a^b f(x)dx$ est négatif.

2. f négative ou nulle,



si b est plus petit que a alors $\int_a^b f(x)dx$ est positif.

3. f quelconque,



si b est plus petit que a alors on obtient l'opposé.

On admettra que cette aire algébrique **se calcule toujours à l'aide d'une primitive** comme dans le cas où la fonction était supposée positive.

6.3 Intégrales généralisées

Il peut arriver, et cela arrive fréquemment en probabilité que l'on soit en présence d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx, \text{ où } \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Quand ces intégrales existent, cela correspond à des portions illimitées de surfaces. Si f est suffisamment négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$, il arrive que ces aires soient finies. En fait, quand ces intégrales existent, il faut les comprendre de la façon suivante

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Nous n'entrerons pas dans les détails mais nous allons donner quelques exemples.

Exemple 48 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} = 1.$$

2.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x} dx = e^{-1} - \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} = e^{-1}.$$

3.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

6.4 Quelques applications

Donnons maintenant quelques applications en économie.

6.4.1 Calcul d'un surplus

Soit un bien donné qui s'échange à un prix P pour une quantité Q donnée. On suppose souvent que lorsqu'un consommateur dispose d'une quantité limitée de ce bien, il est prêt à payer chaque unité supplémentaire à un prix d'autant plus fort qu'il possède peu d'unité de ce bien. Ceci explique que sa fonction de demande, qui est la relation que l'on établit entre les quantités demandées d'un bien et le prix de ce bien, est supposée décroissante. Si pour acheter une unité supplémentaire, il est prêt à payer P_1 , puis pour l'unité suivante P_2 , ..., pour n unités supplémentaires, il est prêt à payer $\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Si le prix du marché s'établit à P_E , alors le consommateur aura économisé $\sum_{i=1}^n P_i - nP_E$, ce que l'on appelle **le surplus**. Ce surplus est en fait l'aire hachurée sur la figure 7 suivante :

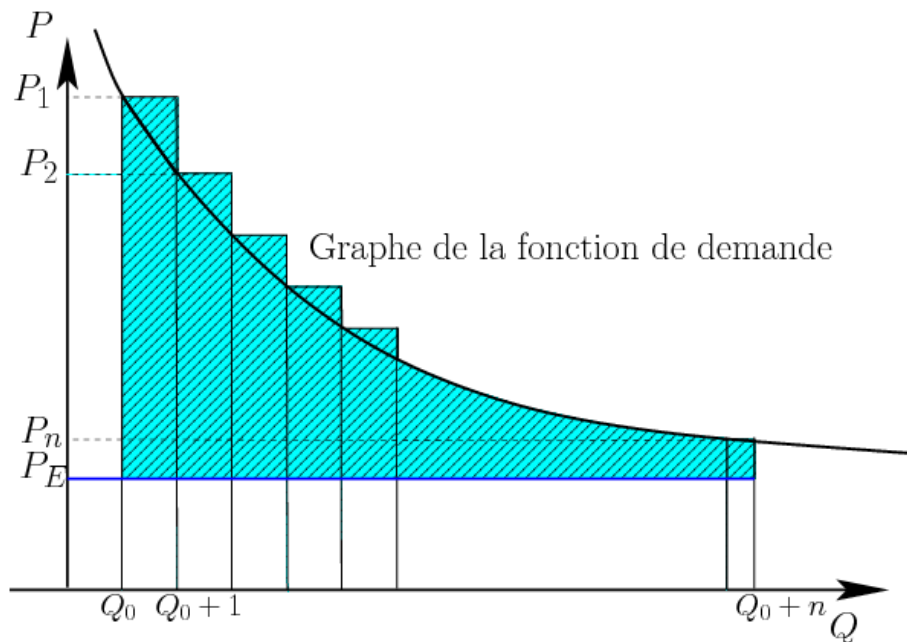


FIG. 7 – Représentation graphique du surplus.

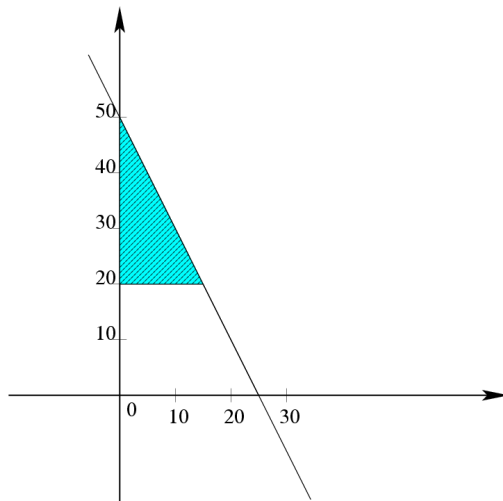
On peut facilement en calculer une approximation au moyen de l'intégrale de la fonction de demande :

$$\sum_{i=1}^n P_i - nP_E \simeq \int_{Q_0}^{Q_0+n} P(x)dx - nP_E.$$

Exercice 12 Calculer le surplus dans le cas où $P(Q) = 50 - 2Q$ et $P_E = 20$ et $n = 15$.

Réponse : Le surplus est égal à

$$\int_0^{15} (50 - 2Q)dQ - 20 \times 15 = 750 - 225 - 300 = 225.$$



6.4.2 Montant d'un impôt par tranches

L'impôt sur le revenu a pour but de remplir les caisses de l'État pour faire face à ses dépenses (salaires des fonctionnaires, dépenses publiques). Il est calculé suivant un modèle à plusieurs tranches, en effet, on pourrait imaginer un impôt proportionnel, chaque contribuable donnerait un pourcentage fixe mais ce système serait très inégalitaire. Il y a donc plusieurs tranches. Mais ce n'est pas tout. Imaginons un impôt avec deux tranches, si le quotient familial (QF) est inférieur à 5000 €, le foyer ne paye rien et si le quotient familial est supérieur à 5000 €, le foyer paye 10%. Ce système est aussi très inégalitaire car si l'on déclare 5001 €, on paye 500,1 €, on est donc désavantagé par rapport à un foyer déclarant 5000 €! Le système retenu est donc de n'imposer le foyer que sur la partie du quotient familial qui dépasse 5000 €, c'est-à-dire $5001-5000=1$ € sur notre exemple.

Voici sous forme de tableau les taux marginaux d'imposition en France pour une part (on suppose donc que le foyer est constitué d'une personne) en 2007. Le calcul est un peu plus compliqué quand il y a plusieurs personnes, nous n'entrerons pas dans les détails.

Tranches du quotient familial (revenus 2006)	Taux
Jusqu'à 5614 €	0,0%
De 5615 € à 11198 €	5,5%
De 11199 € à 24872 €	14,0%
De 24873 € à 66679 €	30,0%
Plus de 66679 €	40,0%

TAB. 2 – Taux marginaux d'imposition en France pour une part en 2007.

Quel sera l'impôt I payé par un foyer dont le quotient familial est 60000 €? C'est l'aire de la surface hachurée sur le graphique 8, plus précisément

$$I = 0 \times 5614 + \left(5,5 \times (11198 - 5614) + 14 \times (24872 - 11198) + 30 \times (60000 - 24872) \right) / 100.$$

La fonction donnant l'impôt en fonction du quotient familial est la primitive du taux et est linéaire par morceaux. Elle est donnée en kilo€ par la formule

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5.614 \\ 0.055x - 0.30877 & \text{si } 5.614 < x \leq 11.198 \\ 0.140x - 1.2606 & \text{si } 11.198 < x \leq 24.872 \\ 0.300x - 5.24012 & \text{si } 24.872 < x \leq 66.679 \\ 0.40x - 11.90802 & \text{si } x \geq 66.679. \end{cases}$$

Son graphe est porté sur la figure 9.

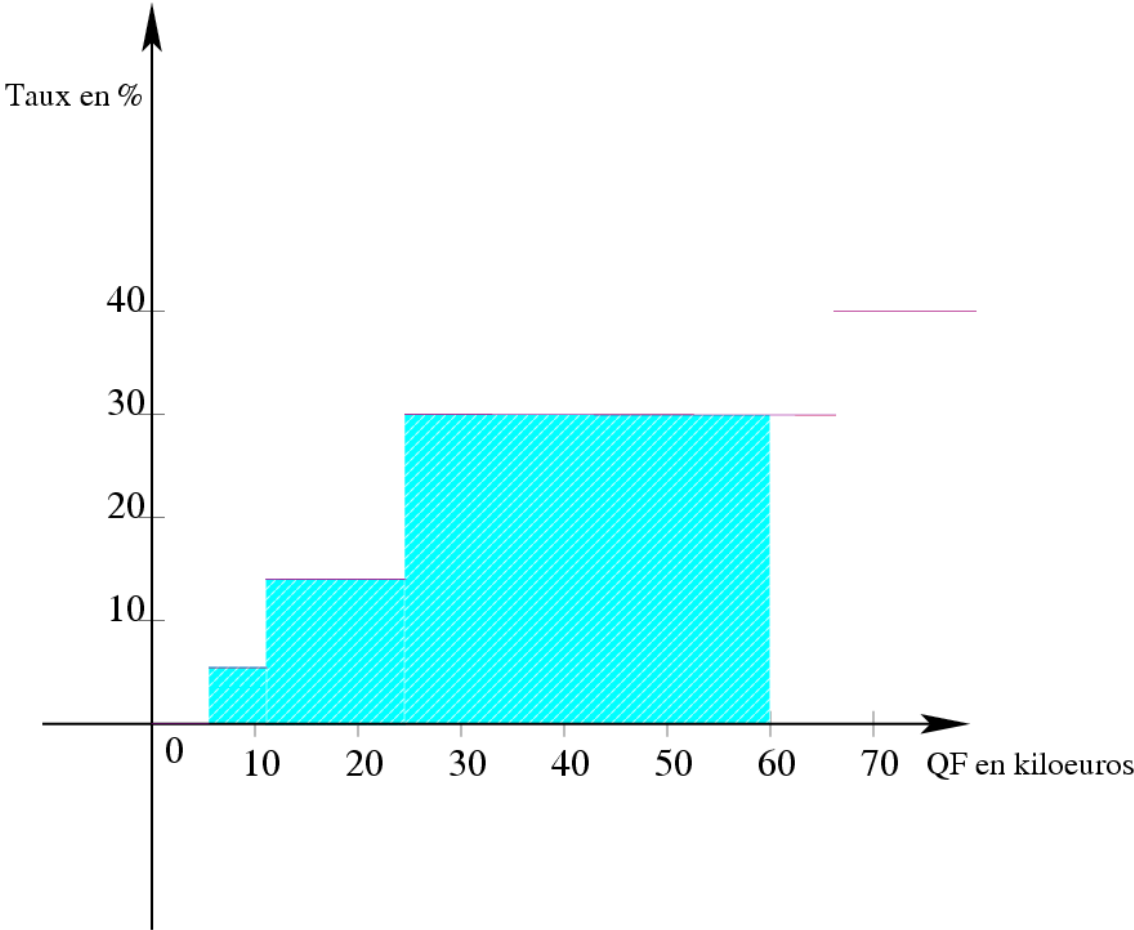


FIG. 8 – Exemple de calcul d'un impôt.

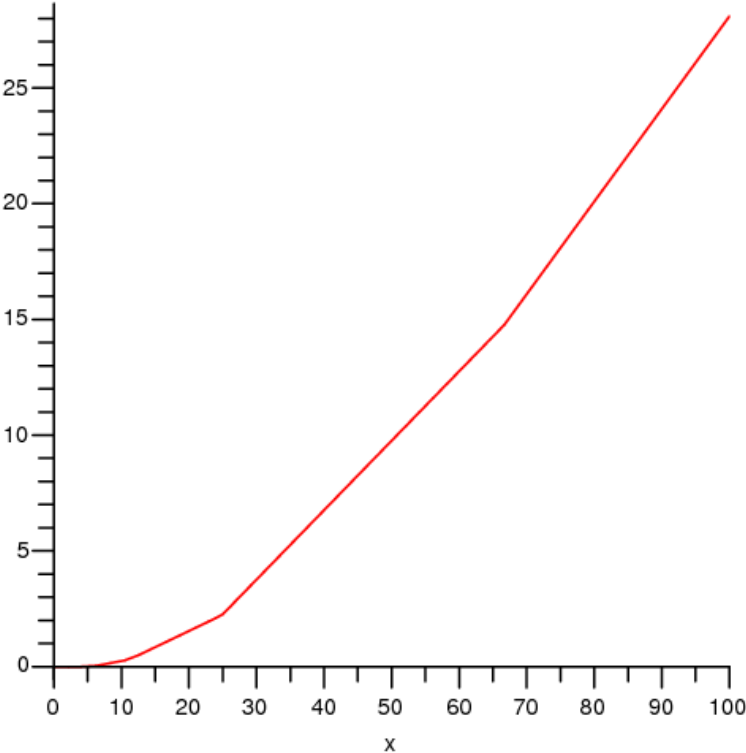


FIG. 9 – Graphe de la fonction permettant de calculer l'impôt à payer.

Chapitre 7

Equations et inéquations linéaires

Dans ce chapitre, nous allons étudier les équations, les systèmes d'équations et les inéquations linéaires. Nous appellerons équation **linéaire** à une inconnue une équation de la forme $ax = b$, à deux inconnues une équation de la forme $ax + by = c$ et à trois inconnues, une équation de la forme $ax + by + cz = d$. Un système d'équations linéaires est constitué de plusieurs équations qui doivent toutes être satisfaites. Enfin, une inéquation ou un système d'inéquations linéaires se définit de la même manière en remplaçant les égalités par des inégalités.

Nous allons commencer par les cas les plus simples.

7.1 Equations, inéquations et systèmes linéaires à au plus deux inconnues

7.1.1 Equations linéaires à une seule inconnue

Une équation linéaire à une seule inconnue est immédiate à résoudre, en effet, l'équation linéaire $ax = b$, avec a différent de 0, a pour solution unique $x = b/a$.

7.1.2 Equations linéaires à deux inconnues

Une équation linéaire à deux inconnues est l'équation d'une droite. Elle possède donc une infinité de solutions qui sont tous les points de cette droite. En résumé, l'équation linéaire $ax + by = c$ a pour solutions tous les points de la droite d'équation $ax + by - c = 0$.

7.1.3 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues a pour solutions les points (x, y) qui appartiennent à la fois à **deux** droites. Comme deux droites se coupent en général en un point unique, la solution est unique le plus souvent ; mais parfois les deux droites sont parallèles ou même confondues. Dans ce dernier cas, tous les points de la droite sont des solutions, comme s'il n'y avait qu'une seule équation, dans le premier cas, il n'y a aucune solution. En résumé, le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_0x + b_0y = c_0, \\ a_1x + b_1y = c_1, \end{cases}$$

possède soit une solution unique, soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Ces trois possibilités sont illustrées sur les figures suivantes :

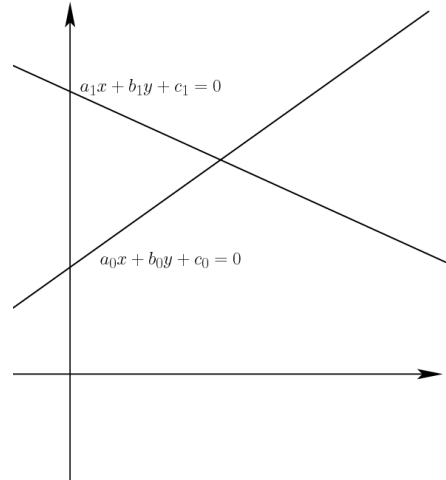


FIG. 1 – Exemple d'une solution unique.

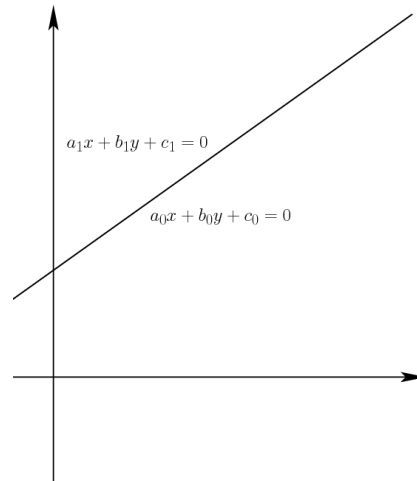


FIG. 2 – Exemple d'une infinité de solutions.

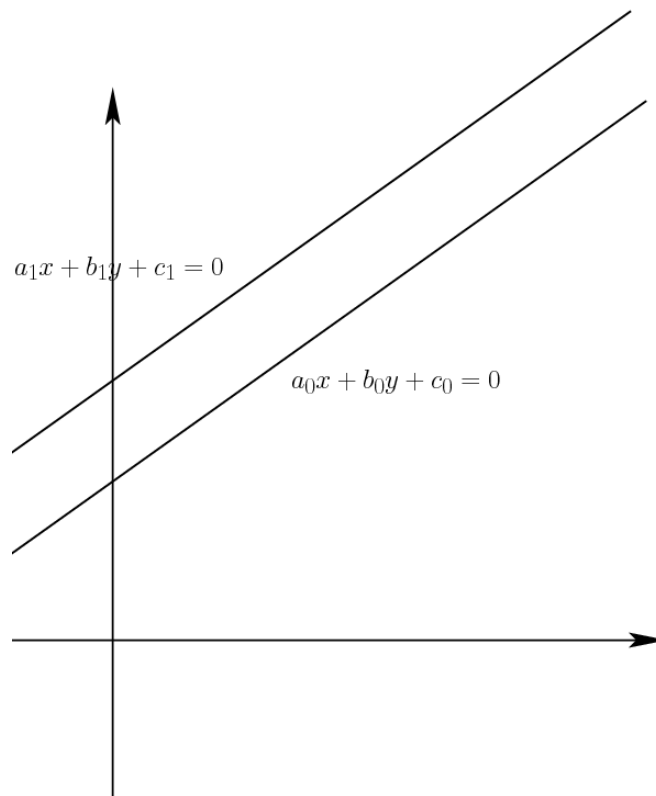


FIG. 3 – Exemple où il n'y a aucune solution.

Pour savoir dans lequel de ces trois cas on se trouve, il suffit de connaître un moyen de savoir si deux droites données par leur équation sont parallèles ou non et si elle sont parallèles dans quel cas elles sont confondues.

On a le résultat suivant : On se donne six réels a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1 que l'on suppose non nuls. Deux droites d'équations $a_0x + b_0y = c_0$ et $a_1x + b_1y = c_1$ sont parallèles si et seulement si

$$a_0b_1 - b_0a_1 = 0.$$

Elles sont confondues si et seulement si

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \frac{c_0}{c_1}.$$

Exercice 13 Indiquer combien de solutions possèdent le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 9y & = 5, \\ -x + (4 + \alpha)y & = -5\alpha, \end{cases}$$

1. si $\alpha = 0$,
2. si $\alpha = 0,5$.

Réponse :

1. Si $\alpha = 0$, on a $2 \times 4 - (-1) \times -9 = -1$ qui est différent de 0. Les deux droites ne sont donc pas parallèles, le système possède une seule solution.
2. Si $\alpha = 0,5$, on a $2 \times 4,5 - (-1) \times -9 = 0$. Les deux droites sont donc parallèles, de plus

$$\frac{2}{-1} = -2, \quad \frac{-9}{4,5} = -2, \quad \frac{5}{-2,5} = -2.$$

Les deux droites sont donc confondues, le système possède donc une infinité de solutions.

Il reste maintenant à savoir comment calculer la solution unique quand elle existe, les formules explicites étant trop compliquées, il est plus simple de procéder par **substitution** : on exprime x en fonction de y au moyen de la première équation, on porte l'expression obtenue dans la deuxième équation qui est alors une équation à une seule inconnue. En la résolvant, on obtient y puis x à partir de son expression en fonction de y .

Donnons un exemple : On veut résoudre

$$\begin{cases} -x + 3y = 6, & (1) \\ 2x + y = -5. & (2) \end{cases}$$

On remarque tout d'abord que d'après ce qui précède, ce système a une unique solution. On déduit de (1) que $x = 3y - 6$, ce qui donne avec (2),

$$2(3y - 6) + y + 5 = 0,$$

soit encore

$$7y - 7 = 0.$$

On en déduit donc que $y = 1$ et que $x = 3 \times 1 - 6 = -3$. la solution de ce système est illustrée graphiquement sur la figure 4, ce qui donne aussi un autre moyen de résolution appelée résolution graphique.

Exemple 49 Ajustement de l'offre et de la demande

En concurrence parfaite, consommateurs et producteurs existent en très grand nombre et l'importance de chacun d'eux est trop faible pour qu'ils puissent isolément exercer une action sur le prix. L'offre étant une fonction croissante de ce dernier et la demande une fonction décroissante, un prix trop élevé pour un produit entraîne un excédent d'offre par rapport à la demande et un prix trop faible un excédent de demande par rapport à l'offre. L'équilibre est réalisé lorsque le prix se trouve à un niveau tel que son offre et sa demande sont égales.

Voici un exemple, supposons que la fonction d'offre a pour équation $Q_O = 0,7p + 0,4$ et la fonction demande a pour équation $Q_D = 1,6 - 0,5p$. Le prix d'équilibre est celui qui égale l'offre et la demande soit $1,6 - 0,5p = 0,7p + 0,4$ donc $p = 1$.

La recherche de l'équilibre correspond à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} Q = 1,6 - 0,5p, \\ Q = 0,7p + 0,4. \end{cases}$$

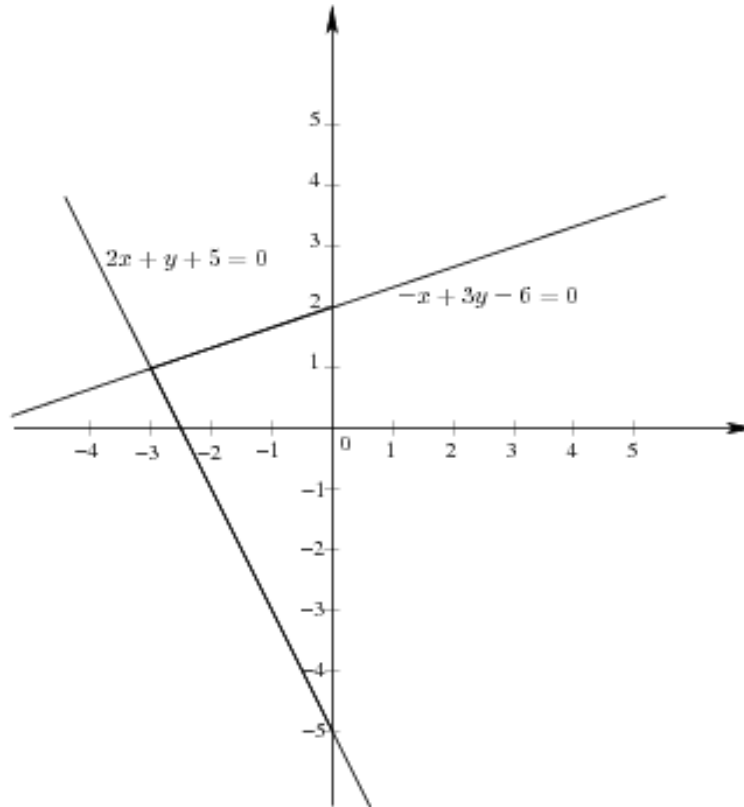


FIG. 4 – Interprétation graphique de l'exemple précédent.

Examinons maintenant le cas des inéquations linéaires.

7.1.4 Inéquations linéaires à une inconnue

L'inéquation linéaire $ax \geq b$ a pour solutions tous les points de la demi-droite $[b/a, +\infty[$ si a est strictement positif et tous les points de la demi-droite $] -\infty, b/a]$ si a est strictement négatif.

Lorsque l'on a un système de plusieurs inéquations, les solutions sont les points d'intersection de plusieurs demi-droites. Plusieurs cas se présentent donc :

1. Il n'y a aucune solution si les deux demi-droites sont disjointes.

Par exemple,

$$\begin{cases} 2x \geq 3, \\ -x \geq 1. \end{cases} \quad (7.1)$$

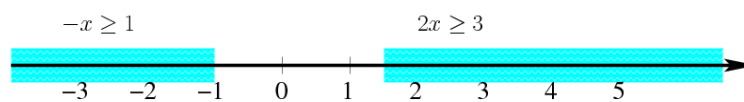


FIG. 5 – Interprétation graphique du système 7.1

2. Il y a une infinité de solutions situées sur un segment.

Par exemple,

$$\begin{cases} 2x \geq 3, \\ -x \geq -3, \end{cases} \quad (7.2)$$

qui a pour solution l'ensemble des réels x tels que

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

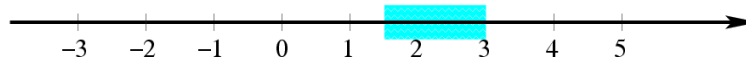


FIG. 6 – Interprétation graphique du système 7.2

3. Il y a une infinité de solutions situées sur une demi-droite.

Par exemple,

$$\begin{cases} 2x \geq 3, \\ x \geq 3, \end{cases} \quad (7.3)$$

qui a pour solution l'ensemble des réels x tels que

$$x \geq 3.$$

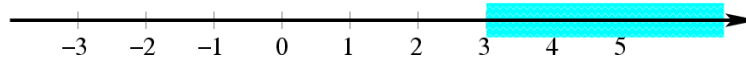


FIG. 7 – Interprétation graphique du système 7.3

7.1.5 Inéquations linéaires à deux inconnues

L'ensemble des points (x, y) vérifiant une inéquation linéaire $ax + by + c \geq 0$, ou $ax + by + c > 0$ est un **demi-plan** délimité par la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Comme cette droite délimite deux demi-planes, on teste l'inéquation sur un point, par exemple $(0, 0)$, si il n'appartient pas bien-sûr à la droite.

Donnons un exemple : représentons les solutions de l'inéquation $x + y + 2 \leq 0$. Il s'agit d'un demi-plan délimité par la droite d'équation $x + y + 2 = 0$. $(0, 0)$ ne satisfait pas l'inéquation, le demi-plan solution est donc celui qui ne contient pas l'origine et est représenté sur la figure 8.

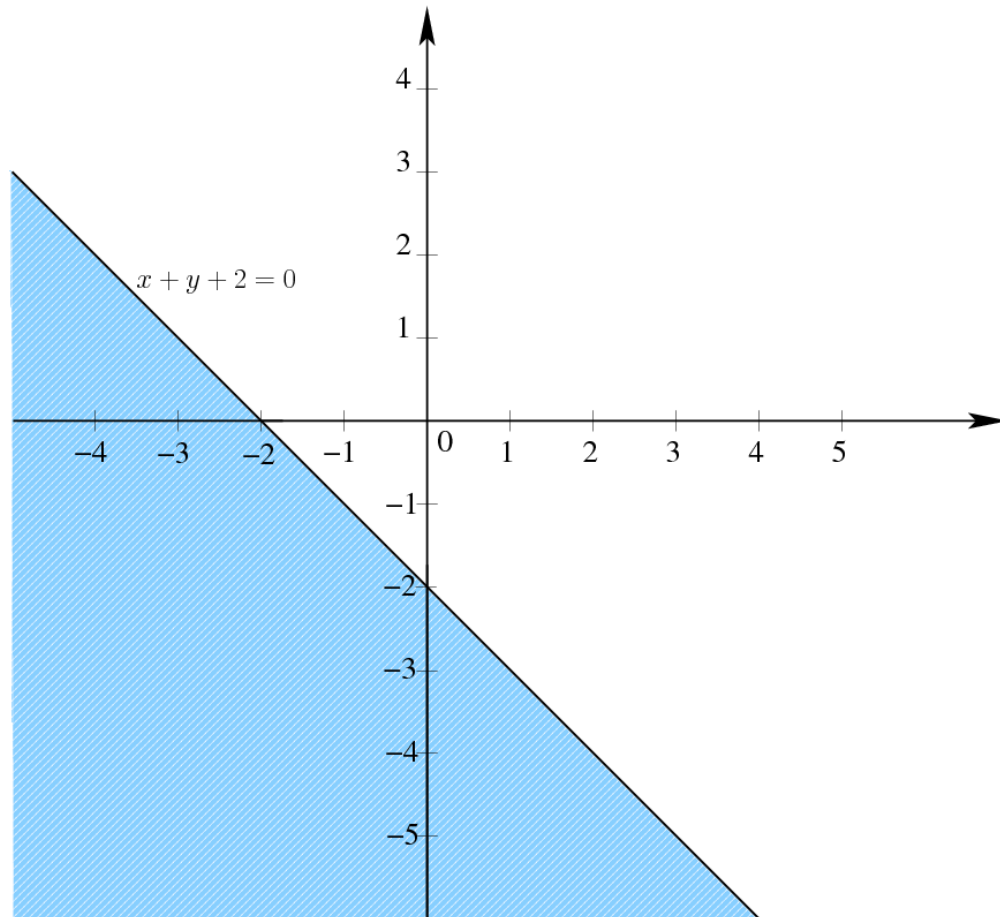


FIG. 8 – Interprétation graphique d'une inéquation linéaire à deux inconnues

Un système de plusieurs inéquations linéaires à deux inconnues a pour solution une intersection de demi-plans.

Donnons un exemple : représentons les solutions du système d'inéquations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0, \\ 2x + y + 2 \geq 0, \\ x \leq 1. \end{cases} \quad (7.4)$$

Il s'agit d'un triangle présenté sur la figure 9.

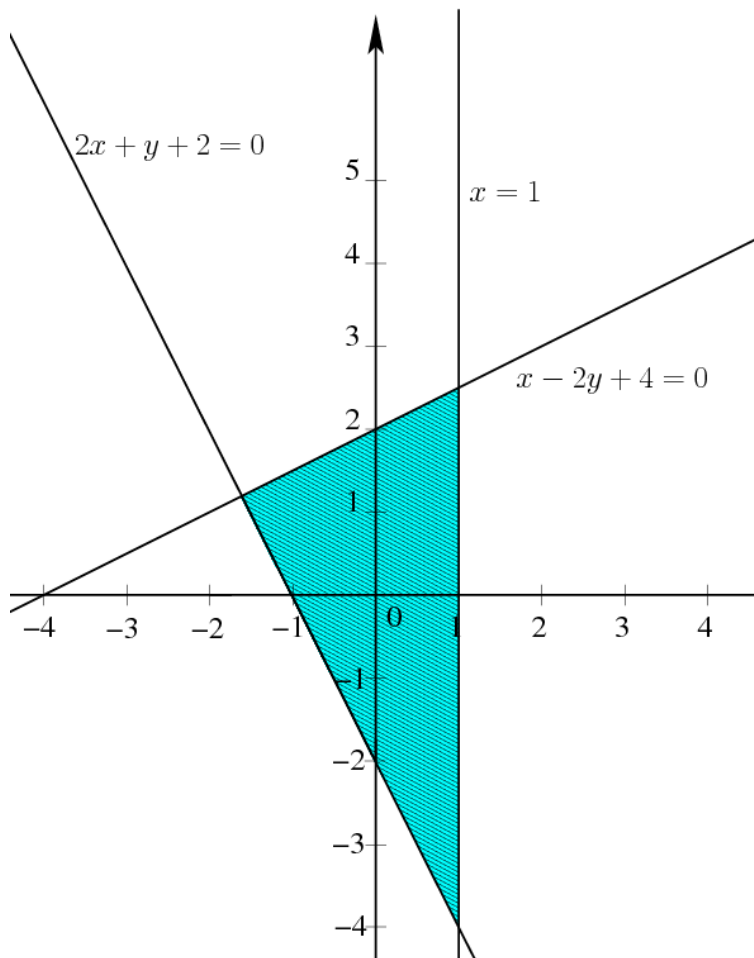


FIG. 9 – Interprétation graphique des solutions du système 7.4

7.2 Systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues

Nous allons terminer ce chapitre en étudiant les solutions de systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues, si on généralise ce que nous avons vu pour les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, il s'agit en fait de déterminer l'intersection de trois plans dans l'espace, c'est-à-dire les points (x, y, z) qui appartiennent à la fois à ces trois plans.

On peut donc avoir plusieurs cas, la solution peut être unique si les trois plans se coupent en un seul point comme sur la figure 10, il peut n'y avoir aucune solution si deux des trois plans sont parallèles et non confondus comme sur la figure 11. Il reste ensuite deux possibilités, les trois plans peuvent se couper selon une droite comme sur la figure 12 ou être confondus, l'ensemble des solutions est donc un plan comme sur la figure 13.

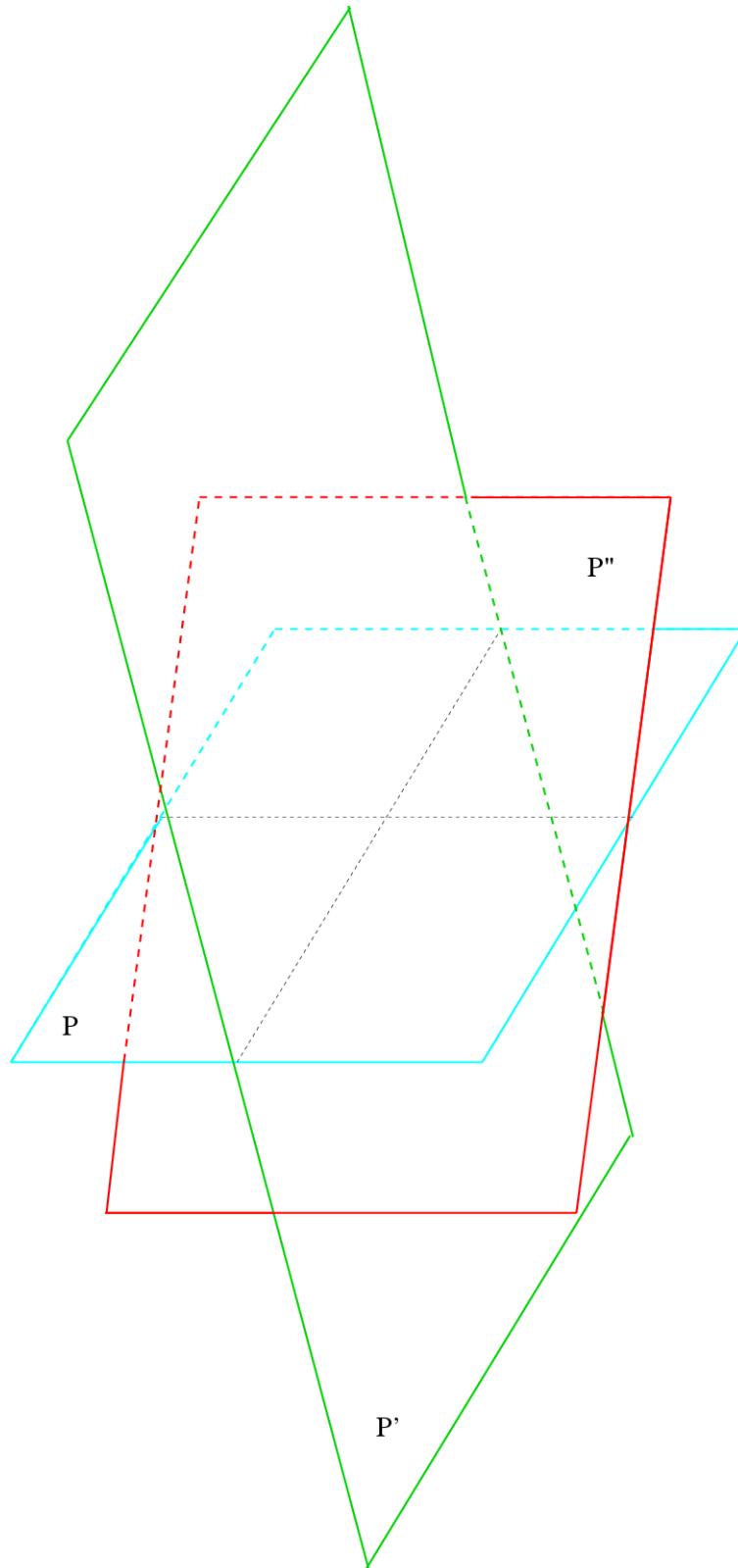


FIG. 10 – Exemple où les trois plans se coupent en un seul point

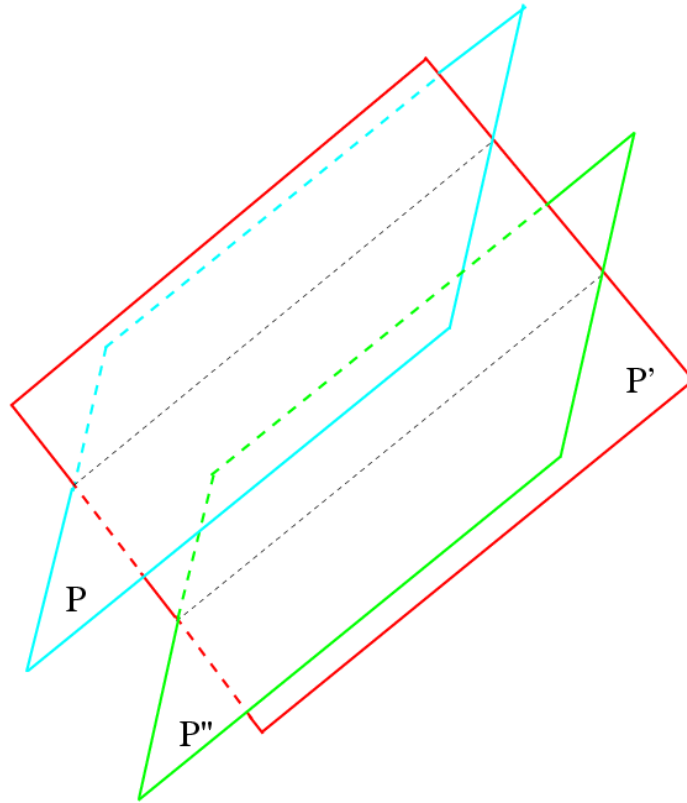


FIG. 11 – Exemple où il n'y a aucune solution, P et P'' étant parallèles

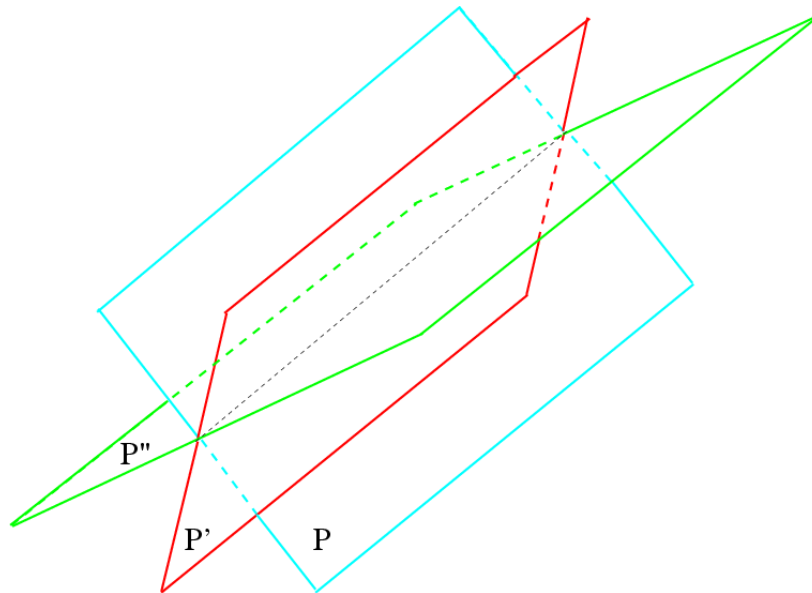
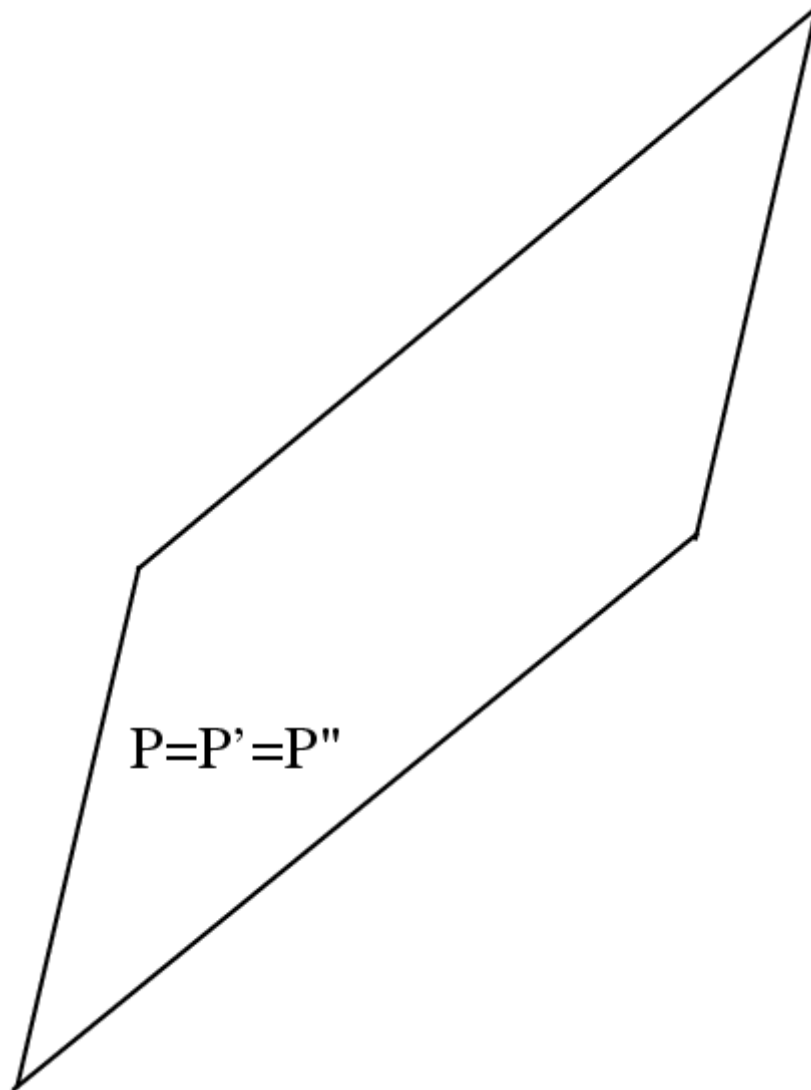


FIG. 12 – Exemple où les trois plans se coupent selon une droite

FIG. 13 – Exemple où P , P' et P'' sont confondus

7.2.1 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Nous allons présenter dans cette partie une méthode permettant de résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z = d_0, \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases}$$

a_i , b_i , c_i et d_i , $i = 1, 2, 3$, étant des réels donnés. Nous allons commencer par étudier les cas des systèmes triangulaires puis le cas général en donnant des exemples qui correspondent aux situations déjà présentées.

On appelle système triangulaire un système de la forme

$$\begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z = d_0, \\ \quad b_1y + c_1z = d_1, \\ \quad \quad c_2z = d_2. \end{cases}$$

Ce système est très simple à résoudre en utilisant une “remontée triangulaire” que nous allons voir sur un exemple.

Exemple 50 Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, & (1) \\ \quad -2y - z = -7, & (2) \\ \quad \quad -5z = -15. & (3) \end{cases}$$

On tire de (3) que $z = 3$, on écrit ensuite à partir de (2) que $-2y = z - 7 = 3 - 7 = -4$ d'où $y = 2$. Enfin, on tire de (1) que $2x = -3y + z + 5 = -6 + 3 + 5 = 2$, d'où $x = 1$. La solution du système est donc $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

La méthode du pivot de Gauss consiste pour un système quelconque à se ramener à un système triangulaire, c'est-à-dire à trouver un système triangulaire qui a exactement la même solution, en additionnant les lignes ou en les permutant.

Voyons cela sur un exemple, on veut résoudre le système

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1, \\ 2x + 5y + 4z = 4, \\ x - 3y - 2z = 5, \end{cases}$$

on note ℓ_1 la première ligne du système, ℓ_2 la deuxième ligne du système et ℓ_3 la dernière ligne du système.

Première étape : On commence par remplacer ℓ_2 par $\ell_2 - 2\ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - \ell_1$. On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1, \\ \quad -3y - 2z = 2, \\ \quad -7y - 5z = 4. \end{cases}$$

Deuxième étape : On remplace ensuite ℓ_3 par $\ell_3 - 7\ell_2/3$, on obtient alors

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1, \\ \quad -3y - 2z = 2, \\ \quad \quad -z/3 = -2/3. \end{cases}$$

On peut alors résoudre ce système par remontée triangulaire, on trouve $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$.

Remarque 21 Afin de s'assurer que la solution trouvée est bien la bonne, il suffit de vérifier que cette solution vérifie bien les trois équations du système.

Pour ne pas alourdir les notations, nous allons écrire le calcul que nous venons de faire de la façon suivante : on écrit le système sous la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

On écrit ensuite la première étape sous la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1 \end{array}$$

On écrit enfin la deuxième étape sous la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{array} \right) \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 7\ell_2/3$$

Et on en déduit $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$.

Exercice 14 Résoudre en proposant les deux écritures le système

$$\begin{cases} 4x - 3y - 3z = 6, \\ 2x - 3y - z = -2, \\ 4x + 3z = 3. \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu au début, le système peut n'avoir aucune solution, avoir comme solution une droite ou plan. Nous allons voir ces trois cas de figure sur trois exemples.

Premier exemple : on désire résoudre le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

Première étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 3\ell_1 \end{array}$$

Deuxième étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2/2$$

Le système est équivalent au système

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 2, \\ -2y - 10z = 12, \\ 0 = 2, \end{cases}$$

il n'a donc aucune solution.

Deuxième exemple : on désire résoudre le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & -9/2 & -3 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Première étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 3/10 & -21/5 & -3/5 \\ 0 & -1/5 & 14/5 & 2/5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 6\ell_1/5 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 4\ell_1/5 \end{array}$$

Deuxième étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 3/10 & -21/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_2/3$$

Le système est équivalent au système de deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} 5x - 4y + z = 3, \\ 3y/10 - 21z/5 = -3/5, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{cases} x = 11z - 1, \\ y = 14z - 2, \end{cases}$$

ce système a une **infinité** de solutions, autant que de choix possible de z . x et y sont dites **inconnues principales** et z est dite **inconnue auxiliaire**.

Dernier exemple : on désire résoudre le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 10 & -8 & 2 & 6 \\ 15 & -12 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Première étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 3\ell_1 \end{array}$$

Les solutions du système correspondent aux points appartenant au plan d'équation $5x - 4y + z = 3$. x est l'inconnue principale et y et z les inconnues auxiliaires.

Remarque 22 *Nous n'avons pas dans ces exemples permuter d'équations, mais il est important de bien savoir qu'une permutation d'équations ne change rien aux solutions du système mais peut grandement simplifier les calculs. Par exemple, reprenons le système*

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1, \\ 2x + 5y + 4z = 4, \\ x - 3y - 2z = 5. \end{cases}$$

Si nous avons écrit le système sous la forme

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 4, \\ x + 4y + 3z = 1, \\ x - 3y - 2z = 5, \end{cases}$$

la résolution aurait demandé plus ou moins de calculs ? Comment alors “s’arranger” pour minimiser ces calculs ?