Ferromagnétisme : Contrôle et simulations

Stéphane Labbé

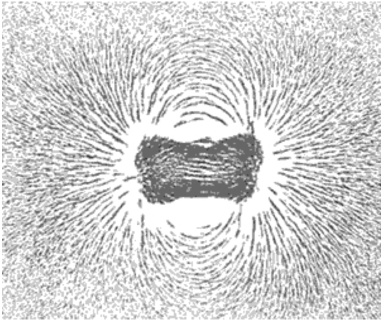
Université Joseph Fourier, Laboratoire Jean Kuntzmann.

Ecole thématique MOAD, Fréjus

Plan

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

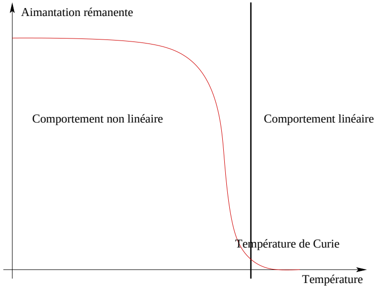
Matériaux ferromagnétiques



Caractéristiques

- Aimantation rémanente sous champ extérieur.
- Température critique séparant les comportements linéaires et non linéaires.
- Formation de microstructures : parois et domaines.

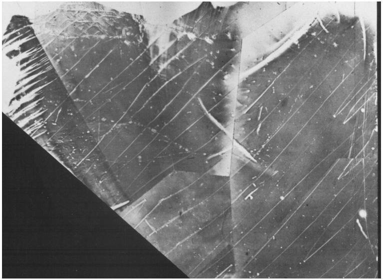
Matériaux ferromagnétiques



Caractéristiques

- Aimantation rémanente sous champ extérieur.
- Température critique séparant les comportements linéaires et non linéaires.
- Formation de microstructures : parois et domaines.

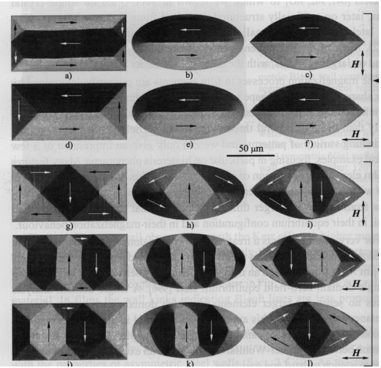
Matériaux ferromagnétiques



Caractéristiques

- Aimantation rémanente sous champ extérieur.
- Température critique séparant les comportements linéaires et non linéaires.
- Formation de microstructures : parois et domaines.

Matériaux ferromagnétiques



Caractéristiques

- Aimantation rémanente sous champ extérieur.
- Température critique séparant les comportements linéaires et non linéaires.
- Formation de microstructures : parois et domaines.

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

Plan

Bases du micromagnétisme

Description thermodynamique des matériaux ferromagnétiques : micromagnétisme, W.F. Brown, année 60.

Quelques notations

- *Domaine magnétique :* Ω, ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- *Sphère unité :* S^2.
- *Aimantation :* en général m, champ de vecteurs de Ω à valeurs sur S^2.
- *Fonctionnelle d'énergie :* fonctionnelle E définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- *Etat d'équilibre :* minimiseur de la fonctionnelle d'énergie sur les éléments de $H^1(\Omega, S^2)$.

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

Bases du micromagnétisme

Echange

$$E(m) = \frac{A}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2\, dx + \ldots$$

Energie d'échange : due aux interactions courtes distances entre spins des atomes du réseau cristallin.
Seule : les états d'équilibre sont constants sur le domaine.

Magnétostatique

$$E(m) = \frac{A}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |H_d(m)|^2\, dx + \ldots$$

Champ démagnétisant : asymptotique de Maxwell quand le domaine est petit devant la longueur d'onde.
Seul : crée des micro- structures qui tendent à annuler la divergence de l'aimantation sur tout le domaine (équation eïkonale : $|\nabla^\perp \psi| = 1$ p.p. dans Ω).

Magnétostatique

au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(H_d) = 0, \\ \mathrm{div}(H_d) = -\mathrm{div}(\tilde{m}). \end{cases}$$

$\tilde{m}$ prolonge m par 0 dans $\mathbb{R}^3$.

Bases du micromagnétisme

Anisotropie

$$E(m) = \frac{A}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |H_d(m)|^2\, dx + \int_\Omega \varphi(m)\, dx + \dots$$

Anisotropie : Rend compte de la forme du réseau cristallin.
Φ est convexe à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Agit localement (non différentielle).
Seul : aligne l'aimantation sur les directions privilégiées de la fonction φ.

Et enfin ... Zeeman

$$E(m) = \frac{A}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |H_d(m)|^2 + \int_\Omega \varphi(m) - \int_\Omega m \cdot H_{ext}$$

Zeeman : modélise l'action d'un champ extérieur (ne dépendant pas de m).
Seule : aligne l'aimantation dans la direction de H_{ext} en chaque point de Ω.
Il serait bien entendu possible d'ajouter d'autres termes : magnétostriction, échange anisotrope, effets de bords etc.

Bases du micromagnétisme

Il est également possible de construire une équation d'évolution : le système de Landau et Lifchitz. Cette équation dérive de l'équation microscopique de la précession de Larmor des moments magnétiques.

Landau et Lifchitz

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H(m) - \alpha m \wedge (m \wedge H(m)),$$

où $H(m)$ est le champ effectif.

$$H(m) = -\frac{dE}{dm}.$$

On se place ici dans le cas où : $\varphi(m) = \frac{K}{2}(|m|^2 - (m \cdot u)^2)$ où u est un élément de $L^\infty(\mathbb{R}^3, S^2)$.

Champ effectif

$$H(m) = A\triangle m + H_d(m) + K(m.u)u + H_{ext},$$

Quelques remarques :

- Les solutions d'équilibre vérifient : $\|H(m) \wedge m\|_{0,\Omega} = 0$.
- Si le champ extérieur est indépendant du temps, l'énergie des solutions du système de Landau et Lifchitz décroît.
- La norme locale des solutions du système est conservée.

Plan

Existence de solutions

Statique

Démontrer l'existence des minimiseurs de l'énergie $E(m)$ dans l'espace $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sous la contrainte $|m| = 1$ presque partout dans Ω ne présente pas de difficultés majeures.
Par contre, exhiber la régularité des minimiseurs est particulièrement délicat :

Régularité des minimiseurs de $E(m)$

Les miniseurs de $E(m)$ sous la contrainte $|m| = 1$ presque partout dans Ω sont, pour Ω tri dimensionnel, de régularité H^3 dans Ω sauf en un nombre fini de singularités H^1.

Résultats dus à R. Hardt et D. Kinderlehrer (00), G. Carbou (97), C. Bonjour (96)

Dynamique

- Couplage avec Maxwell, solution faibles, A. Visintin (85),
- échange uniquement, solutions faibles globales et non unicité, F. Alouges et A. Soyeur (92) (étendu au problème complet, S.L. (98)),
- existence locale et unicité de solutions fortes, P. Fabrie et G. Carbou (01).

On peut également noter les résultats suivants en l'absence d'échange

- Propagation d'ondes en dimension 1, P. Joly et O. Vacus (97),
- Existence et unicité de solutions fortes dans tout l'espace, J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch (97).

Plan

Etude asymptotique, état de l'art

Limite Maxwell-magnétostatique.

- Analyse de la limite à l'ordre zéro en ε (constante diélectrique), G. Carbou et P. Fabrie (98),
- *(Coll. avec L. Halpern)* Construction d'une hiérarchie de modèles en le petit paramètre $\frac{\bar{x}}{c\bar{t}}$.

Nano-fils.

- Analyse de la limite du modèle, D. Sanchez (04),
- *(Coll. avec G. Carbou)* Stabilité des structures parois.
- *(Coll. avec G. Carbou et E. Trélat)* Contrôlabilité des parois.

Fractures.

- Analyse théorique et numérique d'un modèle de fractures, K. Santugini (04-06).

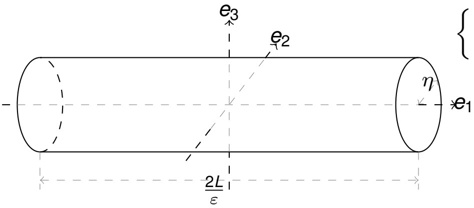
Plaques minces.

- échange constant, G. Carbou (99), G. Gioia et R.D. James (97) : convergence forte, mais ne rend pas compte des phénomènes attendus.
- tube infini et échange évanescent, F. Alouges, T. Rivière et S. Serfaty (02) : solutions fortes mais modèle non physique,
- modèle complet (échange et épaisseur tendant vers zéro), A. Desimone, R. Kohn, F. Otto et S. Müller (02) : modèle physique mais solutions faibles.
- *(Coll. avec F. Alouges)* modèle complet (échange tendant vers zéro) : modèle intermédiaire, convergence forte.

Plan

Du modèle en dimension 3 au nano-fil : contexte

On s'intéresse à l'évolution de l'aimantation dans un nano-fil modélisé grâce aux approximations suivantes



La section η est considérée petite par rapport à $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Problème statique à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ in } H^1(\Omega_{\varepsilon,\eta}, S^2) \text{ tel que} \\ \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}(u) = \min_{v \in H^1(\Omega_{\varepsilon,\eta}, S^2)} \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}(v), \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\Omega_{\varepsilon,\eta} =]-\frac{L}{\varepsilon}, \frac{L}{\varepsilon}[\times B_2(0,\eta),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}(v) \quad &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\varepsilon,\eta}} |\nabla v|^2 \, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(v)|^2 \, dx \\ &- h\int_{\Omega_{\varepsilon,\eta}} v \cdot e_1 \, dx. \end{aligned}$$

Comment construire un problème dynamique asymptotique ?

Le problème asymptotique

Coll. avec G. Carbou

Theorem

$\mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}$ gamma-converge vers $\underline{\mathcal{E}}_\varepsilon$ au sens de $H^1(\Omega_{\varepsilon,1},\mathbb{R}^3)$ dans $H^1(\Omega_{\varepsilon,1},S^2)$.

Ou l'énergie limite est définie par :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ dans } \underline{H}^1(\Omega_{\varepsilon,1},S^2) \text{ tel que} \\ \underline{\mathcal{E}}_\varepsilon(u) = \min_{v\in \underline{H}^1(\Omega_{\varepsilon,1},S^2)} \underline{\mathcal{E}}_\varepsilon(v), \end{cases} \tag{2}$$

où

$$\underline{H}^1(\Omega_{\varepsilon,1},\mathbb{R}^3) = \{u \in H^1(\Omega_{\varepsilon,1},\mathbb{R}^3) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0\},$$

et pour tout v dans $\underline{H}^1(\Omega_{\varepsilon,1},\mathbb{R}^3)$:

$$\underline{\mathcal{E}}_\varepsilon(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |\frac{\partial v}{\partial x}|^2\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_\varepsilon} |v\cdot e_1|^2\,dx - \frac{h}{\pi}\int_{\Omega_\varepsilon} v\cdot e_1\,dx,$$

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

Le problème asymptotique

On peut alors réécrire l'énergie du problème limite comme suit : pour tout u dans $H^1(]-\frac{L}{\varepsilon},\frac{L}{\varepsilon}[,\mathbb{R}^3)$:

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = 2\pi\, \underline{\mathcal{E}}_\varepsilon(u\cdot\chi_{B^2(0,1)}) = \int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |\frac{\partial v}{\partial x}|^2\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |v\cdot e_1|^2\,dx - h\int_{\Omega_\varepsilon} v\cdot e_1\,dx,$$

alors le champs effectif se réécrit
$H_e = \frac{d\mathcal{E}_\varepsilon}{du}$, c'est à dire $H_e = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2\, e_2 - u_3\, e_3 + h\, e_1$.
Et par conséquent, le problème limite dynamique pourra se réécrire sous la forme suivante : pour u_0 dans $C^\infty(]-\frac{L}{\varepsilon},\frac{L}{\varepsilon}[)$, trouver u dans $C^\infty([0,T]\times]-\frac{L}{\varepsilon},\frac{L}{\varepsilon}[)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u\wedge H_e - u\wedge(u\wedge H_e),\ x\in]-\dfrac{L}{\varepsilon},\dfrac{L}{\varepsilon}[, \\[2ex] H_e = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2\,e_2 - u_3\,e_3 + h\,e_1, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(-\dfrac{L}{\varepsilon}) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\dfrac{L}{\varepsilon}) = 0, \\[2ex] u(x,0) = u_0(x),\ \forall x\in]-\frac{L}{\varepsilon},\frac{L}{\varepsilon}[, \end{cases} \tag{3}$$

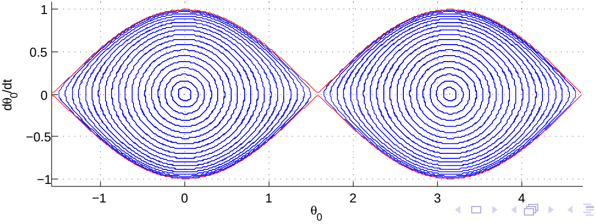
Existence des états d'équilibre : les parois

Ainsi, à une rotation près autour de l'axe e_1, les configurations d'équilibre du problème pourront être cherchées sous la forme : $m = (\sin\theta_0, \cos\theta_0, 0)$, avec θ_0 une fonction de $]-\frac{L}{\varepsilon}, \frac{L}{\varepsilon}[$. On peut alors démontrer le résultats suivant

Theorem

Si $L/\varepsilon > \pi$, il est existe des configurations en paroi. Ces configurations sont centrées au milieu du fil, c'est à dire $\theta_0(0) = 0$.

En fait, le problème revient à résoudre $-\theta_0'' - \sin\theta_0 \, \cos\theta_0 = 0, \; \forall x \in]-\frac{L}{\varepsilon}, \frac{L}{\varepsilon}[,$ avec $\theta_0'(-\frac{L}{\varepsilon}) = \theta_0'(\frac{L}{\varepsilon}) = 0$.



Instabilité des parois en l'absence de champ appliqué

Introduisons la base mobile $(M_0(x), M_1(x), M_2)$ donnée par

$$\forall x \in]-\frac{L}{\varepsilon}, \frac{L}{\varepsilon}[,\ M_0(x) = \begin{pmatrix} \sin\theta_0(x) \\ \cos\theta_0(x) \\ 0 \end{pmatrix},\ M_1(x) = \begin{pmatrix} -\cos\theta_0(x) \\ \sin\theta_0(x) \\ 0 \end{pmatrix},\ M_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

les perturbation autour de l'équilibre M_0 peuvent alors être décrites par l'équation suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in [-\frac{L}{\varepsilon}, \frac{L}{\varepsilon}],\quad u(t,x) = r_1\ M_1 + r_2\ M_2 + \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}\ M_0.$$

on a

$$\begin{aligned} H_e &= M_0 \left(2\partial_x r_1 \partial_x \theta_0 +\ r_1 \partial_{xx}\theta_0 - (\partial_x\theta_0)^2 - r_1 sin\theta_0 \cos\theta_0 + \sin^2\theta_0\right) \\ &+M_1\ (\partial_{xx} r_1 - r_1((\partial_x\theta_0)^2 - \cos^2\theta_0)\ - \partial_{xx}\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0) \\ &+M_2(\partial_{xx} r_2) + Q(r), \end{aligned}$$

avec $Q(r)$ est la partie non-linéaire en r de H_e. On peut alors écrire

$$\partial_t r = J \begin{pmatrix} (\mathcal{L} - \cos^2\gamma_0) r_1 \\ \mathcal{L} r_2 \end{pmatrix} + F(r, \partial_x r, \partial_{xx} r),$$

avec $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et, $\mathcal{L}r = -\partial_{xx} r_2 + g_0 r_2$, où $g_0(x) = \sin^2\theta_0 - (\theta_0')^2$.

Instabilité des parois en l'absence de champ appliqué

L'instabilité de la paroi est alors donnée par l'étude de l'opérateur $\mathcal{L}$.

Theorem

$\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire positif dont la première valeur propre, 0, est associée à la fonction propre $\cos\theta_0$ et sa seconde valeur propre, 1, est associée la fonction propre $\sin\theta_0$.

Ce qui nous permet alors de démontrer le théorème suivant d'instabilité de la paroi mobile

Theorem

Soit $L/\varepsilon > \pi$ et θ_0 définissant la paroi. La solution statique $M_0 = (\sin\theta_0, \cos\theta_0, 0)$ est linéairement instable pour $h = 0$.

On se pose alors la question de la stabilisation des parois au moyen d'un champ magnétique extérieur.

Stabilisation des parois

On démontre alors le théorème suivant

Theorem

Soit L et ε comme précédemment, $M_0 = (\sin\theta_0, \cos\theta_0, 0)$ le profil canonique introduit antérieurement. Alors, avec le contrôle défini par

$$h(m(t,.)) = \left[-\frac{\varepsilon}{2L} \int_{-L/\varepsilon}^{L/\varepsilon} m_1(t,s)ds \right].$$

M_0 est stable pour un champ appliqué donné par $H_a = h(m)e_1$.

Il est donc possible, avec un contrôle simple à écrire, de stabiliser les parois dans les nano-fils de longueur finie.

Plan

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

Cas du fil en boucle

Coll. avec Y. Privat et E. Trélat.

Pour le fil en boucle, l'équation que nous allons considérer est la suivante : pour u_0 dans $C^\infty_\Pi(\mathbb{R})$, trouver u dans $C^\infty_\Pi([0,T] \times \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e),\ x \in \mathbb{R}, \\ \\ H_e = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2\, e_2 - u_3\, e_3 + h\, e_1, \\ \\ \text{pour tout } t\ u(0,t) = u(L,t) \\ u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

Cas du fil en boucle

Les familles de solutions statiques

Les solutions statiques, à l'instar du problème sur le fil fini, sont construites à partir des solutions d'équations elliptiques de première espèce.

Etats quantifiés

En fait, ceci donne des états quantifiés stables modulo les translations le long du fil et les rotations autour de l'axe du fil.

Question

Peut-on construire des contrôles permettant de passer d'un état d'énergie à un autre ? La réponse est a priori oui.

Cas du fil infini, un bref aperçu

Coll. avec C. Prieur et E. Trélat.

Dans le cas du fil infini, le problème devient (en reprenant l'étude asymptotique précédente) : pour u_0 dans $C^\infty(\mathbb{R})$, trouver u dans $C^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e), \; x \in \mathbb{R}, \\ H_e = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2 \, e_2 - u_3 \, e_3 + h \, e_1, \\ \text{pour tout } t \; \lim_{x \to \infty} u(x,t) = e_1, \lim_{x \to \infty} u(x,t) = -e_1 \\ u(x,0) = u_0(x), \; \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

En fait, ce cas est dégénéré par rapport au précédent.

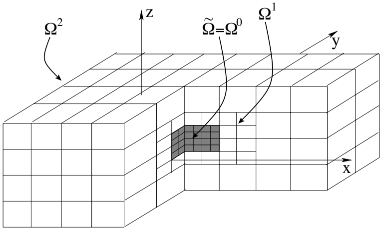
Les familles de parois que étudions, pendant de celles trouvées dans les fils finis, sont stabilisables grâce à des contrôle a priori non explicites. L'analyse s'effectue grâce au théorème de Lassalle alors que dans le cas précédent, l'analyse énergétique de type Lyapunov fonctionne.

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

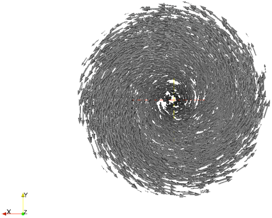
Exemple de calculs en domaines périodiques

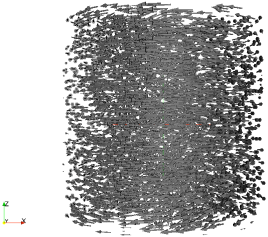
(Coll. avec S. Faure)

But : avoir une méthode compatible avec la méthode de calcul rapide dans le cas non périodique.
Approche : utilisation de la décroissance du champ à travers un maillage diadique multi-niveaux.



Calculs en domaine périodique





Calculs en domaine périodique