

Espaces de modules en géométrie algébrique

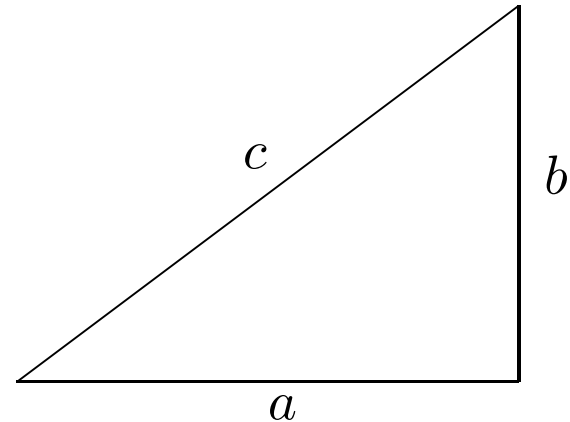
O. Serman

Thèse effectuée au JAD sous la direction d'A. Beauville

1 Deux problèmes classiques

- Triplets pythagoriciens :

Trouver tous les triangles rectangles dont les trois arêtes sont de longueur entière.



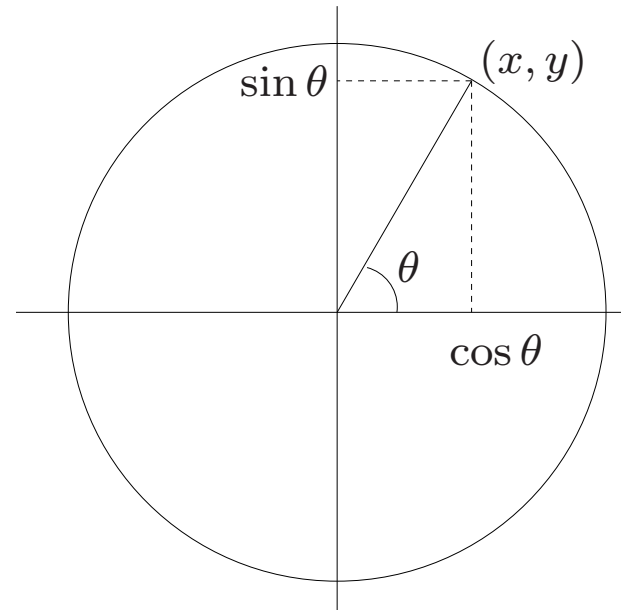
Autrement dit : trouver tous les triplets de nombres entiers $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

En posant $x = \frac{a}{c}$ et $y = \frac{b}{c}$, cela devient $x^2 + y^2 = 1$: on reconnaît l'équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Il suffit donc de trouver les points du cercle unité donc les coordonnées appartiennent à \mathbb{Q} .

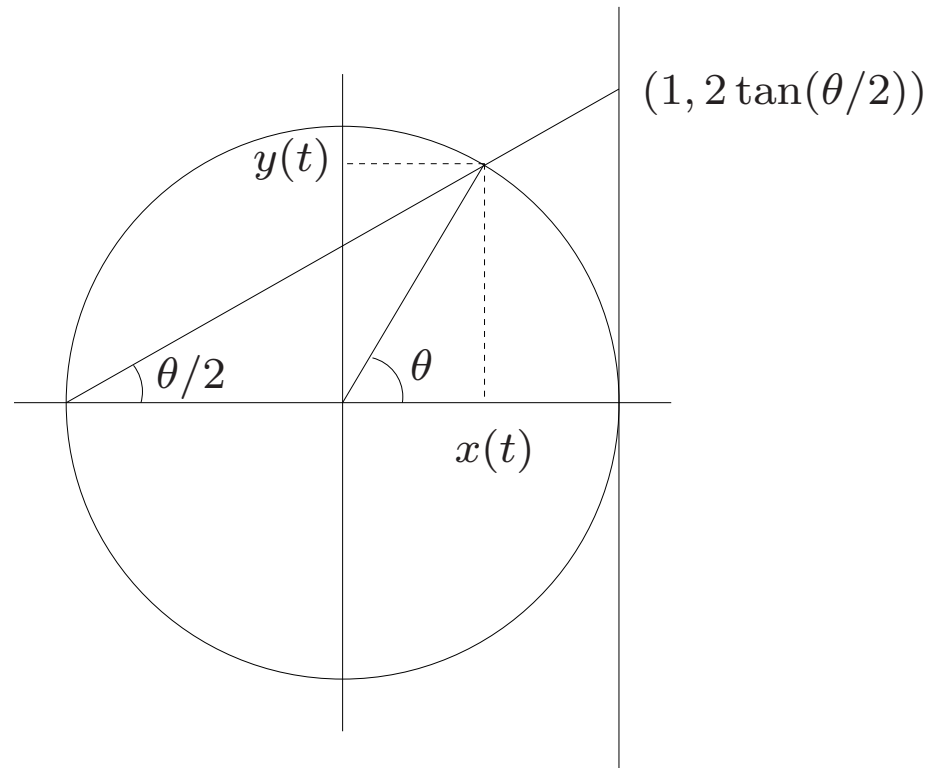
Ce cercle est paramétré par les fonctions trigonométriques :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$



Les formules classiques $\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$ et $\sin(\theta) = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$ fournissent, en posant $t = \tan(\theta/2)$, une *paramétrisation rationnelle* du cercle :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$



L'avantage de cette paramétrisation est que $t \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{Q}^2$.

Mais la relation $t = \frac{y}{1+x}$ montre qu'on a mieux : $t \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{Q}^2$.

Tout point du cercle à coordonnées rationnelles s'écrit donc $(x(t), y(t))$ pour un certain $t \in \mathbb{Q}$ (à l'exception de $(-1, 0)$, qui correspond à $t = \infty$).

Conclusion : toute solution «non triviale» de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ satisfait $\frac{a}{c} = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}$ et $\frac{b}{c} = \frac{2uv}{v^2 + u^2}$ pour un certain $t = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} (\cap]0, 1[)$.
On montre alors facilement que toute solution est de la forme

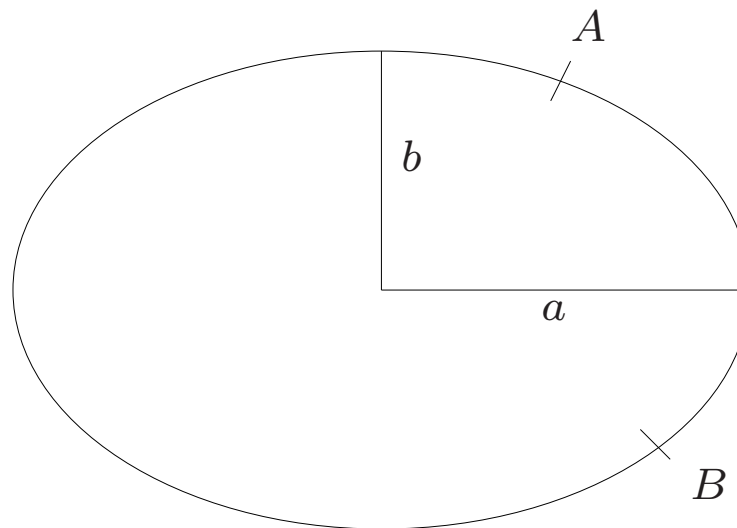
$$a = \frac{v^2 - u^2}{\delta}k, \quad b = \frac{2uv}{\delta}k, \quad c = \frac{v^2 + u^2}{\delta}k,$$

où k , u et v sont trois entiers non nuls tels que $u \leq v$, et δ désigne le pgcd de 2 et $u^2 + v^2$.

On a résolu un exemple d'équation *diophantienne* à l'aide d'une méthode géométrique. C'est un problème en général très dur, car on ne dispose qu'exceptionnellement d'une paramétrisation rationnelle.

- **Longueur d'arcs, pendule et intégrales elliptiques :**

Trouver la longueur d'un arc d'ellipse compris entre les points A et B .

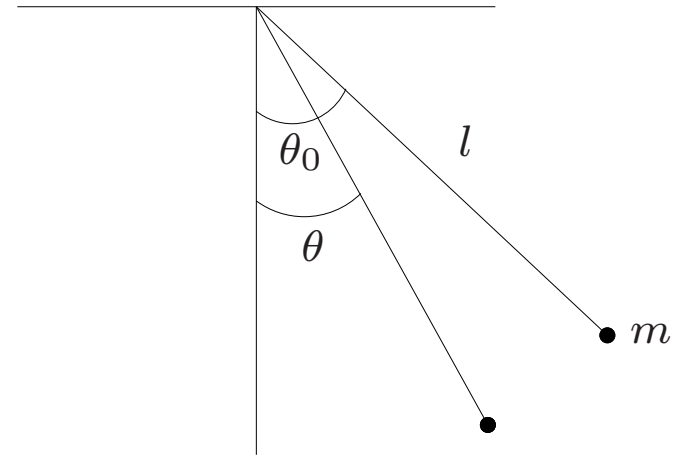


On utilise la paramétrisation (non rationnelle) de l'ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donnée par les fonctions trigonométriques : $x(\theta) = a \cos \theta$ et $y(\theta) = b \sin \theta$. La longueur de l'arc est alors, avec $k = \sqrt{1 - b^2/a^2}$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta &= \int \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \int \frac{1 - k^2 u^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} du \end{aligned}$$

Trouver la période T d'un pendule simple non amorti (de masse m et de longueur l).



Un bilan énergétique mène à $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0)$, d'où

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta_0/2 - \sin^2 \theta/2}}.$$

Le changement de variable $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2)u$ donne la formue exacte

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}).$$

longueur d'un arc d'ellipse : $L = a \int \frac{1 - k^2 u^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} du$

période du pendule simple : $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} du$

Ces intégrales sont deux exemples d'*intégrales elliptiques* : on appelle ainsi toute intégrale de la forme

$$\int_a^x \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt,$$

où $P(t)$ est un polynôme de degré 3 ou 4, et $R(t)$ une fraction rationnelle.

Problème : on ne peut pas les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

2 Des intégrales abéliennes aux jacobiennes de courbes

De manière générale on appelle *intégrale hyperelliptique* toute intégrale de la forme

$$\int_a^x \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt,$$

où $P(t)$ est un polynôme de degré d et $R(t)$ une fraction rationnelle.

• **Si $d = 2$** : on sait très bien exprimer l'intégrale en termes de fonctions usuelles. On a par exemple $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$. Notons que l'égalité $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ entraîne la *formule d'addition*

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

• **Si $d = 3, 4$** : on considère ici le cas des intégrales elliptiques. Fagnano et Euler ont établi la formule d'addition suivante

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^{F(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

avec $F(x, y) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{P(x)} - \sqrt{P(y)}}{x - y} \right)^2 - x - y.$

Problème : cette formule n'est pas généralisable telle quelle au cas $d \geq 5$. La découverte du cadre adéquat pour étendre cette identité est l'objet de résultats fondateurs obtenus par Abel, Jacobi, et bien sûr Riemann.

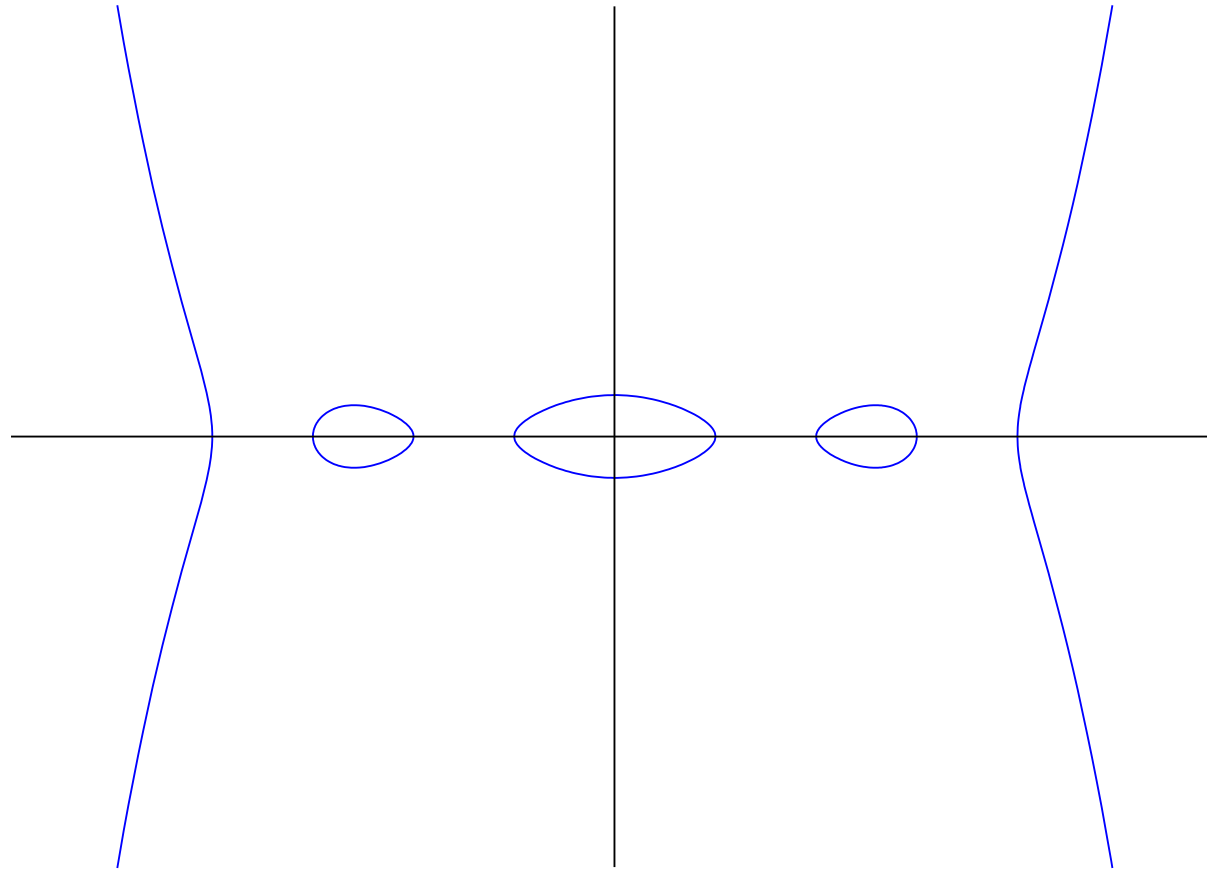
Idée d'Abel : on réécrit $\int_a^x \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt$ sous la forme $\int_a^x R(t, y(t)) dt$, où R est maintenant une fraction rationnelle à deux variables, et où y est la *fonction implicite* obtenue à partir de l'équation :

$$y^2 = P(t).$$

Remarque : une *intégrale abélienne* est une intégrale de la forme $\int_a^x R(t, y(t)) dt$, où y est définie implicitement par une équation polynomiale quelconque : $\chi(t, y) = 0$.

On est ainsi amené à étudier l'ensemble C_P des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan vérifiant l'équation

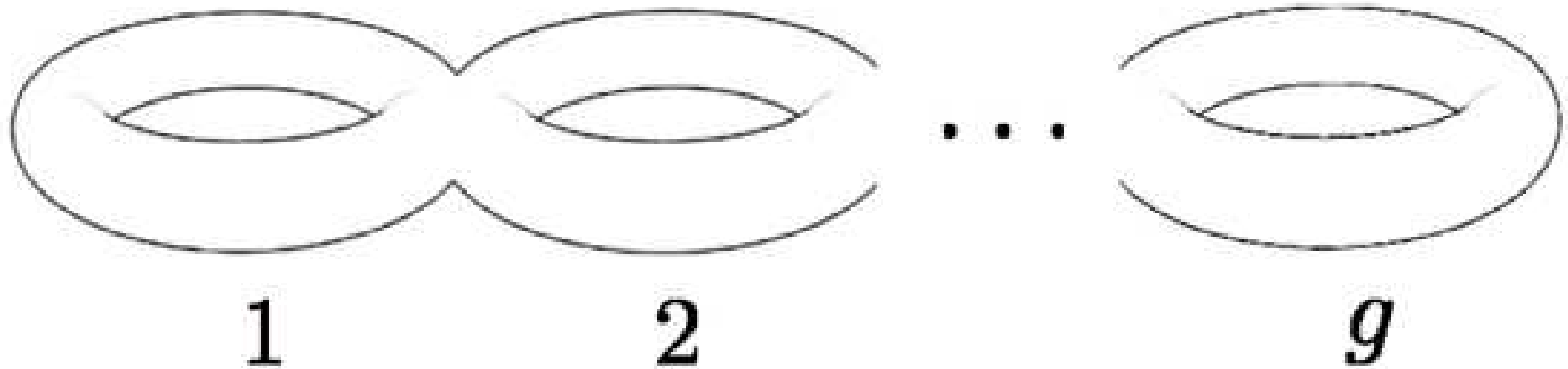
$$y^2 = P(x).$$



$$(y^2 = (x + 8)(x + 6)(x + 4)(x + 2)(x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8))$$

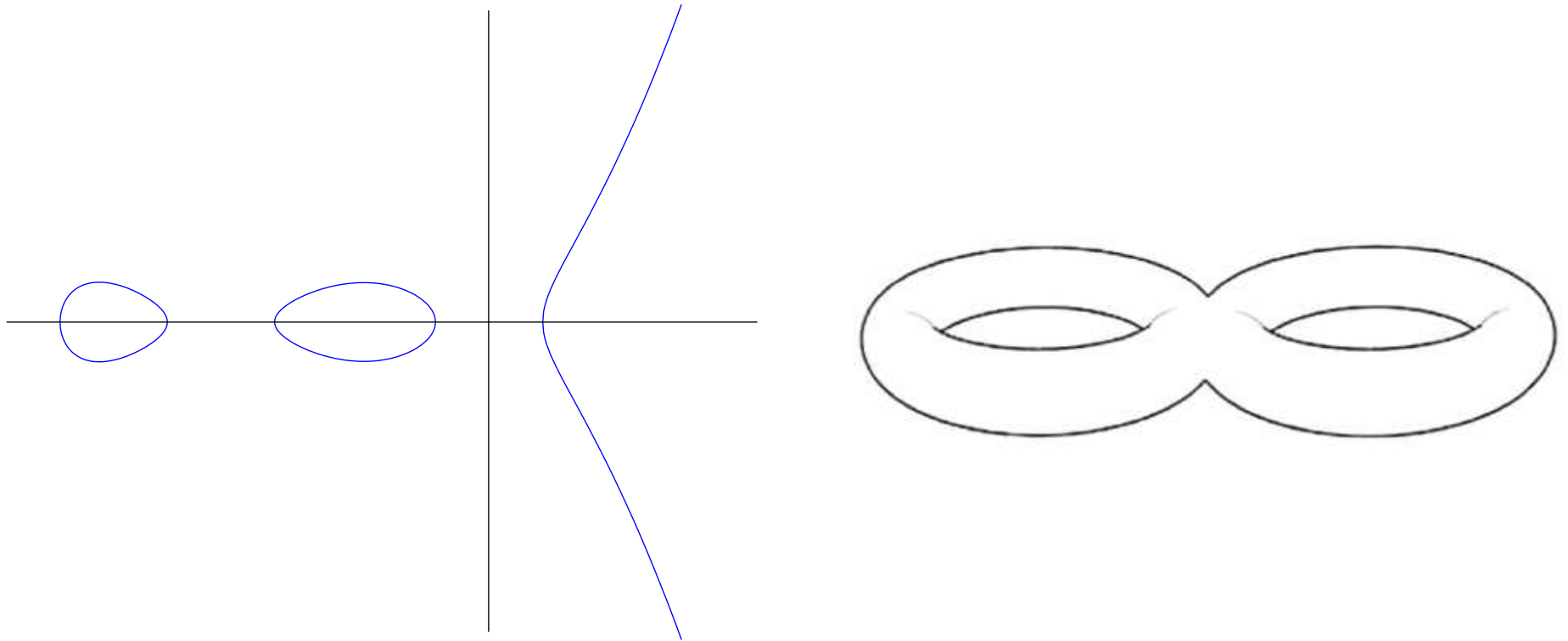
Il est naturel de chercher les solutions de l'équation $y^2 = P(x)$ non pas seulement dans \mathbb{R}^2 mais dans \mathbb{C}^2 , car on attrape ainsi toutes les solutions.

En général toute équation polynomiale de la forme $\chi(x, y) = 0$ définit (dans le plan complexe) une «*courbe algébrique*» C_χ , ou «*surface de Riemann*». Un tel objet ressemble à un tore à g trous ; g est appelé le *genre* de la courbe.



Pour l'équation $y^2 = P(x)$, le lien entre le nombre de trous g et le degré d de P est connu :

$$g = \left[\frac{d+1}{2} \right] - 1.$$



$$(y^2 = (x - 8)(x - 6)(x - 4)(x - 1)(x + 1))$$

• **Vers une formule d'addition pour les intégrales hyperelliptiques.**

Abel considère alors non plus seulement des sommes de deux intégrales hyperelliptiques, mais des sommes de m d'entre elles :

$$\int_a^{x_1} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt + \int_a^{x_2} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt + \cdots + \int_a^{x_m} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt,$$

où x_1, \dots, x_m sont les (abscisses) points d'intersection de C_P avec une courbe variable donnée par une équation $F(x, y; a_1, \dots, a_r) = 0$, dépendant rationnellement des a_i . Il montre que la somme des m intégrales abéliennes est somme d'une fonction rationnelle en les a_i et du logarithme d'une telle fonction.

Abel a aussi cherché les conditions sur $\frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}}$ entraînant l'indépendance (en les a_i) de la somme : il suffit que R soit un polynôme de degré $\leq g - 1$.

La description obtenue de la condition d'indépendance conduit à l'énoncé fondamental suivant : pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour tout *polynôme* R de degré $\leq g - 1$, la somme des intégrales hyperelliptiques

$$\int_a^{P_1} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt + \int_a^{P_2} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt + \cdots + \int_a^{P_m} \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt$$

où P_1, \dots, P_m sont tous les points d'intersection de C_P et d'une courbe variable $F(x, y; a_1, \dots, a_r) = 0$ **est indépendante des paramètres** a_i .

On peut alors associer à toute collection de points (P_1, \dots, P_m) les valeurs des g intégrales correspondant à $R(t) = t^k$, et ces intégrales prennent la même valeur en $(P_i)_i$ et en $(Q_i)_i$ dès que $(P_i)_i$ et $(Q_i)_i$ apparaissent comme les points d'intersection de C_P et de deux courbes appartenant à une même famille de courbes (paramétrée comme plus haut).

On appelle *diviseur* la donnée d'une telle collection de points, deux collections étant identifiées dès qu'elles sont obtenues comme intersection de C_P avec deux courbes d'une même famille (on dit qu'elles sont *linéairement indépendantes*). L'ensemble des diviseurs ainsi identifiés est noté $\text{Pic}(C_P)$.

Le résultat précédent assure l'existence d'une application bien définie

$$\text{Pic}^0(C_P) \longrightarrow \mathbb{C}^g / \sim = \text{Jac}(C_P).$$

Les travaux de Jacobi ont montré que les deux objets sont identiques.

On a explicité un objet géométrique, à savoir la jacobienne $\text{Jac}(C_P)$ de la courbe C_P , dont les points sont en bijection avec l'ensemble des classes de diviseurs sur C_P .

3 Problèmes de modules

Un problème de modules apparaît naturellement lorsqu'on étudie une certaine classe d'objets :

un *espace de modules* est un ensemble dont les points sont en bijection avec les objets étudiés (ceux-ci étant au besoin identifiés suivant une certaine relation d'équivalence), l'ensemble devant être lui-même muni d'une structure particulière.

Lorsque les objets sont ceux de la géométrie algébrique, on cherche un espace de modules qui soit lui-même un espace algébrique.

- **Modules des courbes**

On cherche à classer les courbes algébriques («lisses») de genre g : Mumford a établi l'existence d'un espace algébrique \mathcal{M}_g dont les points correspondent exactement aux courbes de genre g .

Si $g \geq 2$, c'est une variété de dimension $3g - 3$. Si $g = 1$ c'est tout simplement une droite.

- **Jacobiennes de courbes**

Soit C une courbe algébrique. On cherche un espace algébrique dont les points correspondent exactement aux classes de diviseurs sur la courbe. On a vu que la jacobienne $\text{Jac}(C)$ répond à ce problème.

- **Espaces de modules de fibrés vectoriels sur une courbe**

Soit C une courbe algébrique. Une classe de diviseur sur C correspond à un *fibré en droites* \mathcal{L} sur C . Un tel fibré est un espace au-dessus de C qui localement est de la forme $C \times \mathbb{C}$.

On appelle *fibré vectoriel* de rang r un espace \mathcal{E} au-dessus de C qui est localement de la forme $C \times \mathbb{C}^r$.

On cherche alors un espace algébrique dont les points correspondent aux fibrés vectoriels sur C de rang r donné.

Si $r = 1$, la jacobienne convient.

Pour $r \geq 2$ Mumford et Seshadri ont construit des espaces de modules $\mathcal{M}(r, d)$ pour les fibrés *semi-stables* de rang r et de degré d .

- **Fibrés munis de structures supplémentaires**

Soit C une courbe algébrique. On peut considérer des fibrés vectoriels de rang r munis d'une structure orthogonale, c'est à dire que chaque fibre est un espace vectoriel muni d'une forme quadratique. On parle alors de *fibrés orthogonaux* de rang r (on a $d = 0$). Ramanathan a construit un espace $\mathcal{M}_{\text{orth}}(r)$ solution du problème de modules pour de tels fibrés.

On peut associer naturellement à tout fibré orthogonal de rang r un fibré vectoriel de même rang en «oubliant» la forme quadratique. Cela donne une application

$$\mathcal{M}_{\text{orth}}(r) \longrightarrow \mathcal{M}(r, 0)$$

entre les espaces de modules correspondants : cette application est l'objet de ma thèse.