

Les surfaces de Riemann de genre 1

Olivier Serman

Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Le quotient \mathbb{C}/Λ est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann faisant de la projection $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ un revêtement analytique. Si \wp désigne la fonction de Weierstrass associée à Λ , l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ induit un isomorphisme entre \mathbb{C}/Λ et la *cubique de Weierstrass* d'équation

$$(0.1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, où $g_2 = 60 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^4}$ et $g_3 = 140 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^6}$ (cf. [Car] V.2.5). On sait alors que le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ admet trois racines distinctes, i.e. que son discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ est non nul.

Inversement considérons la cubique de Weierstrass E d'équation (0.1) avec $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Le but de ces notes est de montrer qu'une telle courbe munie de sa structure naturelle de surface de Riemann (cf. [Car] VI.5.3) est un quotient de \mathbb{C} par un réseau. On dit que deux réseaux Λ et Λ' sont équivalents lorsque les surfaces de Riemann \mathbb{C}/Λ et \mathbb{C}/Λ' sont isomorphes. L'ensemble des classes d'équivalence est isomorphe à $\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. En outre la fonction modulaire

$$j: \tau \in \mathcal{H} \mapsto \frac{g_2^3(\Lambda_\tau)}{g_2^3(\Lambda_\tau) - 27g_3^2(\Lambda_\tau)} \in \mathbb{C},$$

où Λ_τ désigne le réseau $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, induit une bijection entre $\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et \mathbb{C} , de sorte que trouver un réseau Λ tel que $g_2(\Lambda) = g_2$ et $g_3(\Lambda) = g_3$ se ramène grâce à la surjectivité de j à quelques lignes de calculs (cf. [L] 3.3) qui assurent l'existence de l'isomorphisme attendu.

Nous allons ici en donner une autre preuve, plus géométrique. On peut montrer par une application standard de la formule d'Hurwitz (cf. [Dou] exercice 6.6.2) que E est une surface de genre 1. On va alors prouver que toute surface de Riemann de genre 1 est un quotient de \mathbb{C} (cf. 4.3).

1. Préliminaires

1.1. Soit X une surface de Riemann de genre 1. La classification des surfaces compactes connexes assure que X est homéomorphe au tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. La projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow X$ est alors le revêtement universel (topologique) de X , de groupe de Galois \mathbb{Z}^2 , et les revêtements intermédiaires seront automatiquement galoisiens. La situation topologique est donc très simple; elle est résumée par le diagramme suivant où $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$(1.1.1) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^{2*} \\ & \nearrow \mathbb{Z} & \downarrow \mathbb{Z} \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & X. \end{array}$$

1.2. Il s'agit alors de savoir quelles sont les structures de surfaces de Riemann induites par (1.1.1) sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^{2*} .

Le théorème d'uniformisation (cf. [A-S] III.11G) assure que toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, \mathbb{C} ou \mathcal{H} . Le revêtement universel de X , homéomorphe à \mathbb{R}^2 , ne peut être $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il est donc isomorphe à \mathbb{C} ou \mathcal{H} .

1.3. Supposons que \mathbb{C} soit le revêtement universel de X ; alors X est un quotient de \mathbb{C} par un réseau. En effet, si $\text{Aut}(\mathbb{C})$ désigne le groupe des automorphismes analytiques de \mathbb{C} , X s'identifie à un quotient de \mathbb{C} par un sous-groupe G de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ opérant proprement et librement. Puisque $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$, G est formé de translations, et s'identifie alors à un sous-groupe discret de \mathbb{C} : G est donc ou bien réduit à l'élément neutre, ou bien isomorphe à \mathbb{Z} ou bien un réseau. Ceci prouve la proposition suivante, qui montre en particulier qu'une surface de Riemann compacte dont le revêtement universel est le plan complexe est quotient de \mathbb{C} par un réseau :

Proposition 1.4. *Soit X une surface de Riemann admettant \mathbb{C} comme revêtement universel. Alors X est isomorphe à l'une des surfaces suivantes :*

- \mathbb{C} ,
- \mathbb{C}^* ,
- \mathbb{C}/Λ où Λ est un réseau de \mathbb{C} .

1.5. Il suffit donc de prouver que \mathcal{H} ne peut être le revêtement universel de X . La preuve de ce fait comporte deux étapes : nous allons d'abord étudier quelles sont les quotients analytiques de \mathcal{H} par un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{H})$ isomorphe à \mathbb{Z} . Ensuite nous montrerons que les surfaces ainsi obtenues ne peuvent revêtir X : en vertu de (1.1.1) il suffit de montrer que les groupes d'automorphismes de ces surfaces ne possèdent pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} opérant proprement et librement, ce qui est l'objet de 3.2 et de 4.2. Nous donnons ensuite en 4.5 une preuve plus astucieuse mais peut-être moins généralisable en cela qu'elle utilise directement la commutativité du groupe fondamental de X (alors que le dévissage (1.1.1) ne nécessite pas une telle condition).

2. Description des quotients de \mathcal{H} de groupe fondamental \mathbb{Z}

2.1. Soit Y un quotient de \mathcal{H} par un sous-groupe G de $\text{Aut}(\mathcal{H})$ isomorphe à \mathbb{Z} . Soit g un générateur de G . D'après ([Car] VI.2.6), $g \in \text{PSl}_2(\mathbb{R})$, i.e. g est de la forme

$$g: \tau \in \mathcal{H} \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifient $ad - bc = 1$.

Nous allons distinguer trois cas selon les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2.2 *Si M admet une unique valeur propre réelle.* L'automorphisme g prolongé à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ admet alors un unique point fixe, sur l'axe réel ou à l'infini. On se ramène au second cas en considérant, si $\tau_0 \in \mathbb{R}$ est l'unique point fixe de g , l'automorphisme $h \circ g \circ h^{-1}$ où $h \in \text{Aut}(\mathcal{H})$ prolongé à la droite projective envoie τ_0 sur ∞ (e.g. $\tau \mapsto \frac{\tau - 1 - \tau_0}{\tau - \tau_0}$).

Un automorphisme de \mathcal{H} qui ne fixe (dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) que l'infini est une translation $\tau \mapsto \tau + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En introduisant le morphisme $\tau \mapsto \frac{\tau}{|\alpha|}$ on a finalement l'existence de $h \in \text{PSl}_2(\mathbb{R})$ tel que $h \circ g \circ h^{-1}$ soit ou bien $\tau \mapsto \tau + 1$, ou bien $\tau \mapsto \tau - 1$.

Dans ce cas, Y est isomorphe à $D(0, 1)^* = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$, et le revêtement est donné par $\mathbf{e}: \tau \in \mathcal{H} \mapsto \exp(2i\pi\tau)$.

2.3 Si M admet deux valeurs propres complexes distinctes. Les deux valeurs propres sont alors conjuguées, de sorte que g admet un point fixe dans \mathcal{H} , ce qui est absurde puisque l'action de G est sans point fixe.

2.4 Si M admet deux valeurs propres réelles distinctes. Comme le polynôme caractéristique de M est à coefficients réels, c'est le dernier cas. On procède comme en 2.2 : l'application g a deux points fixes distincts, disons τ_1 et τ_2 , situés sur l'axe réel ou à l'infini. A l'aide d'un automorphisme h de \mathcal{H} envoyant τ_1 sur 0 et τ_2 sur ∞ (considérer le morphisme $\tau \mapsto \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}$ si les deux points fixes sont réels et $\tau_1 > \tau_2$, ou la translation $\tau \mapsto \tau - \tau_1$ si $\tau_2 = \infty$) on se ramène par conjugaison à $\tau_1 = 0$ et $\tau_2 = \infty$, et g est alors une homothétie $\tau \mapsto \alpha\tau$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Quitte à remplacer g par g^{-1} (qui engendre aussi G !) on peut supposer $\alpha > 1$.

Introduisons alors le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha}) \\ \tau &\longmapsto \frac{\log \tau}{\log \alpha} \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < \text{Im}(z) < b\}$ et où \log désigne la détermination principale du logarithme, bien définie sur \mathcal{H} . C'est une fonction holomorphe, bijective de réciproque $\phi_\alpha: \tau \in \mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha}) \mapsto e^{(\log \alpha)\tau} \in \mathcal{H}$.

La surface Y est isomorphe au quotient de \mathcal{H} par $\{g_{\alpha^n}, n \in \mathbb{Z}\}$ où $g_{\alpha^n}: \tau \mapsto \alpha^n \tau$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{h_{\alpha^n}} & \mathcal{H} \\ \phi_\alpha \uparrow & & \downarrow \psi_\alpha \\ \mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha}) & \xrightarrow{g_{\alpha^n}} & \mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha}) \end{array}$$

montre que Y est aussi le quotient de $\mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha})$ par $\{\tau \mapsto \tau + n, n \in \mathbb{Z}\}$. L'exponentielle $\mathbf{e}: \tau \in \mathcal{H} \mapsto \exp(2i\pi\tau)$ envoie $\mathcal{B}(0, \frac{\pi}{\log \alpha})$ sur la couronne $\mathbb{C}(e^{\frac{-2\pi^2}{\log \alpha}}, 1)$ définie par $\{z \in \mathbb{C}, e^{\frac{-2\pi^2}{\log \alpha}} < |z| < 1\}$. Ainsi Y est isomorphe à $\mathbb{C}(e^{\frac{-2\pi^2}{\log \alpha}}, 1)$.

Avec 1.4, cela prouve la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Une surface de Riemann dont le groupe fondamental est égal à \mathbb{Z} est isomorphe à l'une des surfaces suivantes :*

- \mathbb{C}^* ,
- $\mathbb{D}(0, 1)^*$,
- $\mathbb{C}(a, b)$ où $0 < a < b$.

3. Les sous-groupes cycliques de $\text{Aut}(\mathbb{D}(0, 1)^*)$

Proposition 3.1 (Les automorphismes de $\mathbb{D}(0, 1)^*$). *Le groupe des automorphismes de $\mathbb{D}(0, 1)^*$ est le groupe des rotations $\{z \mapsto e^{2i\pi\theta}z, \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Soit $g \in \text{Aut}(\mathbb{D}(0, 1)^*)$; en tant que fonction holomorphe bornée au voisinage de 0, g se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{g}: \mathbb{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{D}(0, 1)^*$. Puisque \tilde{g} est ouverte (c'est une fonction holomorphe!), on a $\tilde{g}(0) \in \mathbb{D}(0, 1)$. Comme g est un isomorphisme, $\tilde{g}(0) = 0$, de sorte que \tilde{g} est un automorphisme de $\mathbb{D}(0, 1)$ fixant 0. La conclusion résulte alors de [Car] VI.3.6.

3.2. Un sous-groupe cyclique infini de $\text{Aut}(\mathbb{D}(0, 1)^*)$ est donc engendré par un morphisme $z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$ où $\theta \notin \mathbb{Q}$. L'ensemble $\{e^{2i\pi n\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ étant alors dense dans le cercle unité, un tel sous-groupe n'opère pas proprement et librement. Le disque épointé $\mathbb{D}(0, 1)^*$ ne peut donc pas revêtir une surface de Riemann de genre 1.

4. Les sous-groupes cycliques du groupe des automorphismes d'une couronne

Théorème 4.1 (Les automorphismes de la couronne $C(r, 1)$). *Soient $0 < r < 1$ et g un automorphisme de la couronne $C(r, 1)$. Alors g est une rotation $z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$ ou une inversion-rotation $z \mapsto \frac{re^{2i\pi\theta}}{z}$.*

Soient $\alpha > 1$ tel que $r = e^{-\frac{2\pi^2}{\log \alpha}}$ et p le revêtement

$$\begin{aligned} p : \mathcal{H} &\longrightarrow C(r, 1) \\ \tau &\longmapsto \exp(2i\pi \frac{\log(\tau)}{\log(\alpha)}) \end{aligned}$$

de 2.4, faisant de $C(r, 1)$ le quotient de \mathcal{H} par le groupe d'automorphismes $G_\alpha = \{\tau \mapsto \alpha^n \tau, n \in \mathbb{Z}\}$. Soit f un automorphisme de $C(r, 1)$; comme \mathcal{H} est simplement connexe, un tel automorphisme se relève en $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathcal{H})$, i.e. on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{H} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ C(r, 1) & \xrightarrow{f} & C(r, 1). \end{array}$$

L'automorphisme \tilde{f} est donc compatible à l'action de G_α , i.e.

$$(4.1.1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \tau \in \mathcal{H}, \tilde{f}(\alpha^n \tau) \in \alpha^{\mathbb{Z}} \tilde{f}(\tau).$$

En tant qu'automorphisme de \mathcal{H} , \tilde{f} est de la forme $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifient $ad - bc = 1$. On déduit alors de (4.1.1)

$$(4.1.2) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{a\alpha^n i + b}{c\alpha^n i + d} \in \frac{ai + b}{ci + d} \alpha^{\mathbb{Z}}$$

puis

$$(4.1.3) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (bd - \alpha^n ac)(1 - \alpha^n) = 0.$$

Ainsi, puisque $\alpha > 1$, on a $ac = 0 = bd$.

Si $c = 0$, $ad - bc = 1$ entrane $b = 0$, de sorte que \tilde{f} est une homothétie, qui descend en une rotation.

Si $a = 0$, $ad - bc = 1$ entrane $d = 0$, et \tilde{f} est alors de la forme $\tau \mapsto -\frac{\beta}{\tau}$ où $\beta > 0$. Il résulte de l'égalité $\log(-\frac{\beta}{\tau}) = \log(\beta) - \log(\rho) + i\pi - i\theta$ (où on a posé $\tau = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$) que, pour tout $z \in C(r, 1)$,

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{2\pi^2}{\log(\alpha)}} e^{2i\pi \frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}}}{z},$$

ce qui est le résultat annoncé.

4.2. On est maintenant en mesure de prouver qu'une couronne ne peut revêtir une surface de Riemann compacte de genre 1. Comme en 3.2 il s'agit de montrer que $\text{Aut}(C(r, 1))$ n'admet pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} opérant proprement et librement.

Soit donc G un sous-groupe cyclique de $\text{Aut}(C(r, 1))$ engendré par un automorphisme g de la couronne. D'après (4.1) g est une rotation ou une inversion-rotation. Dans le premier cas on conclut comme en 3.2 : G est fini ou n'opère pas proprement et librement. Dans le second cas g est d'ordre 2, de sorte que G est de cardinal 2.

On a ainsi établi :

Théorème 4.3. *Une surface de Riemann de genre 1 est un quotient de \mathbb{C} par un réseau.*

Remarque 4.4. La démarche suivie dans la preuve de 4.1 permet de retrouver le théorème de représentation conforme pour les couronnes (cf. [R] 14.22) qui affirme que les couronnes $C(r_1, 1)$ et $C(r_2, 1)$ sont isomorphes si et seulement si $r_1 = r_2$. En effet un isomorphisme f entre ces deux couronnes induit un automorphisme de \mathcal{H} donné par $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$; si α et β sont définis par $r_1 = e^{\frac{-2\pi^2}{\log \alpha}}$ et $r_2 = e^{\frac{-2\pi^2}{\log \beta}}$, on a

$$(4.4.1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{a\alpha^n i + b}{c\alpha^n i + d} \in \frac{ai + b}{ci + d} \beta^{\mathbb{Z}},$$

d'où $ac = 0 = bd$. On en déduit $\alpha \in \beta^{\mathbb{Z}}$.

En considérant f^{-1} on montre de même que $\beta \in \alpha^{\mathbb{Z}}$, de sorte que $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta^{-1}$, le second cas étant exclu car ces deux nombres sont strictement supérieurs à 1. Ainsi r_1 et r_2 sont égaux.

Remarque 4.5. On peut donner une preuve plus courte de 4.3 en remarquant que le commutateur d'un élément $g \in \text{Aut}(\mathcal{H})$ est formé d'automorphismes ayant les mêmes points fixes dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: si g a une unique point fixe, tout élément commutant avec g fixe ce point, et si g a deux points fixes, on montre, en considérant les points fixes d'un élément de $\text{Aut}(\mathcal{H})$ comme les vecteurs propres de la matrice de $\text{Gl}_2(\mathbb{C})$ associée, que tout élément commutant avec g a les deux mêmes points fixes, d'où notre assertion.

On est alors en mesure de caractériser les sous-groupes commutatifs G de $\text{Aut}(\mathcal{H})$ opérant proprement et librement, puisque les éléments de G ont les mêmes points fixes (dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Si ils ont un unique point fixe, 2.2 permet de réaliser G comme un sous-groupe discret de \mathbb{R} , de sorte que \mathcal{H}/G est isomorphe à $D(0, 1)^*$. Si ils ont deux points fixes distincts, 2.4 permet à nouveau de réaliser G comme sous-groupe discret de \mathbb{R} , et \mathcal{H}/G est alors isomorphe à une couronne. Une surface de Riemann de genre 1 ne peut donc pas admettre \mathcal{H} comme revêtement universel.

Notons enfin qu'il existe une autre preuve de l'existence d'un réseau Λ tel que la cubique (0.1) soit isomorphe à \mathbb{C}/Λ : une telle courbe possède une loi de groupe bien connue, qui fournit une infinité d'automorphismes. On peut montrer que *tout quotient de \mathcal{H} n'a qu'un nombre fini d'automorphismes*, ce qui permet de répondre au problème posé dans l'introduction (une telle courbe ne pouvant être isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, puisque la loi de groupe induit des automorphismes sans point fixe, tandis que tout automorphisme de la droite projective fixe au moins un point).

Bibliographie

- [A-S] L.V. AHLFORS et L. SARIO, *Riemann Surfaces*, Princeton Math. Series **26**, Princeton Univ. Press 1960.
- [Car] H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, quatrième édition, 1961.
- [Dou] R. et A. DOUADY, *Algèbre et théories galoisiennes*, tome 2, Cedric/Fernand Nathan, 1979.
- [L] S. LANG, *Elliptic Functions*, Addison-Wesley, 1973.
- [R] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, troisième édition, 1987.