

Dégénérescence de Hodge

Olivier Serman

Introduction

Soit X un schéma propre et lisse sur un corps k . On définit la cohomologie de De Rham de X/k par

$$H_{DR}^*(X/k) = H^*(X, \Omega_{X/k}^\bullet).$$

C'est l'aboutissement de la *suite spectrale de Hodge vers De Rham* définie comme la première suite spectrale d'hypercohomologie relative au foncteur $\Gamma(X, *)$ et au complexe $\Omega_{X/k}^\bullet$:

$$(0.1) \quad E_1^{ij} = H^j(X, \Omega_{X/k}^i) \implies H_{DR}^*(X/k).$$

Si k est de caractéristique nulle, alors (0.1) dégénère en E_1 : c'est une conséquence de la théorie de Hodge si X est projectif sur $k = \mathbb{C}$; on y ramène le cas propre à l'aide notamment du lemme de Chow. La première preuve de la dégénérescence en E_1 de (0.1) indépendante de la théorie de Hodge a été donnée par Faltings.

Nous présentons ici la première preuve purement algébrique de ce résultat, obtenue par Deligne et Illusie [D-I]. La dégénérescence en E_1 de (0.1) est d'abord obtenue en caractéristique $p > 0$ moyennant des hypothèses supplémentaires (majoration de la dimension de X , relevabilité modulo p^2) car il arrive que (0.1) ne dégénère pas en E_1 (cf. [Mum]). Elle résulte par comptage des dimensions d'un résultat de décomposition dans la catégorie dérivée $D(X', \mathcal{O}_{X'})$ du complexe $\tau_{<p} F_* \Omega_{X/k}^\bullet$ où X' est le schéma déduit de X par l'extension des scalaires $k \xrightarrow{\sim} k, \lambda \mapsto \lambda^p$, et où $F: X \rightarrow X'$ désigne le Frobenius relatif (voir 1.1). Raynaud en a déduit un résultat d'annulation à la Kodaira-Akizuki-Nakano. Des arguments « standard » permettent ensuite d'en déduire en caractéristique nulle la dégénérescence de Hodge et le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano.

1. Notations et rappels

1.1. Soit S un schéma de caractéristique p . On note $F_S: S \rightarrow S$ le *Frobenius absolu* défini par l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et par l'élévation à la puissance p sur \mathcal{O}_S . Si X est un S -schéma, on note X' le S -schéma déduit de X par le changement de base F_S , et on définit le *Frobenius relatif* $F = F_{X/S}: X \rightarrow X'$ comme l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & F_X & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{F} & X' & \longrightarrow & X \\ & \searrow u & \downarrow & & \downarrow u \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

où le carré est cartésien.

Si a est une section locale de \mathcal{O}_X on a $d(a^p) = p a^{p-1} da = 0$, de sorte que $F^*(1 \otimes da) = 0$. Il en résulte que le complexe $F_* \Omega_{X/k}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_{X'}$ -

modules, et que $\bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega_{X/k}^\bullet$ est une $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre graduée anticommutative. On a alors le résultat fondamental suivant (voir [K] 7.2) :

Théorème 1.2 (Cartier). *Soient S un schéma de caractéristique p et X un S -schéma.*

(a) *Il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres graduées*

$$\gamma: \bigoplus \Omega_{X'/S}^i \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega_{X/k}^\bullet$$

vérifiant

(i) γ^0 est donné par $F^*: \mathcal{O}_{X'} \rightarrow F_* \mathcal{O}_X$;

(ii) γ^1 envoie $1 \otimes da$ sur la classe de $a^{p-1} da$ dans $\mathcal{H}^1 F_* \Omega_{X/k}^\bullet$ pour toute section locale a de \mathcal{O}_X .

(b) *Si X est lisse sur S , γ est un isomorphisme, que l'on note C^{-1} .*

1.3. Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W_2(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur 2. Il est plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, et le carré suivant est cartésien, où σ désigne l'automorphisme de $W_2(k)$ donné par $(a_0, a_1) \mapsto (a_0^p, a_1^p)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(W_2(k)) \\ F_k \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(W_2(k)). \end{array}$$

1.4. Soient $S \rightarrow \tilde{S}$ un épaissement d'ordre 1 et X un S -schéma plat. On dit que X est relevable sur \tilde{S} si il existe un \tilde{S} -schéma plat \tilde{X} muni d'un isomorphisme $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} S \xrightarrow{\sim} X$.

1.5. Soient A une catégorie abélienne, L un complexe de A et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le tronqué canonique $\tau_{<n} L$ de L comme le complexe de composantes L^i pour $i < n-1$, $\ker(d)$ pour $i = n-1$, et 0 pour $i \geq n$.

Le décalé $L[n]$ est le complexe de composantes $L[n]^i = L^{n+i}$ et de différentielle $d_{L[n]} = (-1)^n d_L$.

2. Décomposition du complexe de De Rham en caractéristique $p > 0$: dégénérescence et annulation

Théorème 2.1 (Deligne-Illusie). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $S = \mathrm{Spec}(k)$, $\tilde{S} = \mathrm{Spec}(W_2(k))$. A tout \tilde{S} -schéma lisse \tilde{X} relevant X est canoniquement associé un isomorphisme de $D(X') = D(X', \mathcal{O}_{X'})$*

$$\varphi_{\tilde{X}}: \bigoplus_{i < p} \Omega_{X'/k}^i[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<p} F_* \Omega_{X/k}^\bullet$$

induisant C^{-1} en cohomologie pour $i < p$.

La démonstration se fait en quatre étapes. Remarquons tout de suite qu'il résulte de 1.3 que relever X sur \tilde{S} équivaut à relever X' sur \tilde{S} : en effet le \tilde{S} -schéma \tilde{X}' déduit de \tilde{X} par le changement de base $\sigma: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ est un relèvement lisse de X' .

Etape 1. Il suffit de construire $\varphi_{\tilde{X}}^1$. La flèche $\varphi_{\tilde{X}}^0$ est nécessairement la composée

$$\mathcal{O}_{X'} \rightarrow F_* \mathcal{O}_X \hookrightarrow F_* \Omega_{X/k}^\bullet.$$

Si on a défini $\varphi_{\tilde{X}}^1$ telle que $\mathcal{H}^1\varphi_{\tilde{X}}^1 = (C^{-1})^1$, la considération de $(\varphi_{\tilde{X}}^1)^{\otimes i}$ et de la flèche d'antisymétrisation $\Omega_{X/k}^i \rightarrow (\Omega_{X/k}^1)^{\otimes i}$ donnée par

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \longmapsto \frac{1}{i!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_i} \varepsilon(s) \omega_{s(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{s(i)}$$

(bien définie pour $i < p$) assure, en vertu de la multiplicativité de C^{-1} , l'existence de $\varphi_{\tilde{X}}^i$ pour $i < p$ induisant C^{-1} en cohomologie.

Etape 2. Cas où $F: X \rightarrow X'$ se relève. Soit $\tilde{F}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ un \tilde{S} -morphisme relevant F . Puisque $F^*: \Omega_{X'/k}^1 \rightarrow F_*\Omega_{X/k}^1$ est nulle, \tilde{F}^* définit une flèche $\Omega_{\tilde{X}'/\tilde{S}}^1 \rightarrow p\tilde{F}_*\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}^1$. L'homomorphisme f déduit de \tilde{F}^* j par division par p vérifie

$$(2.1.1) \quad df = 0$$

et fournit donc un morphisme de complexes

$$(2.1.2) \quad f: \Omega_{X'/k}^1[-1] \longrightarrow F_*\Omega_{X/k}^\bullet$$

tel que $\mathcal{H}^1 f = (C^{-1})^1$.

Etape 3. Cas où F admet plusieurs relèvements. Soient $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ deux relèvements de F . La flèche $\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1: \mathcal{O}_{\tilde{X}'} \rightarrow p\tilde{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est alors une \tilde{S} -dérivation induisant une application $\mathcal{O}_{X'}$ -linéaire

$$(2.1.3) \quad h_{12}: \Omega_{X'/k}^1 \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$$

vérifiant

$$(2.1.4) \quad f_2 - f_1 = dh_{12} ,$$

où f_i est la flèche (2.1.2) associée à \tilde{F}_i .

En outre si \tilde{F}_3 est un troisième \tilde{S} -morphisme relevant F , on a évidemment

$$(2.1.5) \quad h_{12} + h_{23} + h_{31} = 0 .$$

Etape 4. Cas général. Puisque X' est un S -schéma lisse, F , admet localement pour la topologie de Zariski sur X , un relèvement \tilde{F} (cf. EGA IV 17.3.1). Il existe donc un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X tel que, pour tout i , $F|_{U_i}$ se relève en \tilde{F}_i .

On dispose alors sur chaque U_i de l'homomorphisme de complexes (2.1.2)

$$f_i: \Omega_{X'/k|U_i}^1[-1] \longrightarrow F_*\Omega_{X/k|U_i}^\bullet ,$$

et sur chaque $U_{ij} = U_i \cap U_j$ de l'homomorphisme (2.1.3)

$$h_{ij}: \Omega_{X'/k|U_{ij}}^1 \longrightarrow F_*\mathcal{O}_{X|U_{ij}} .$$

Les f_i et les h_{ij} sont liés par

$$(2.1.6) \quad df_i = 0 , \quad f_j - f_i = dh_{ij} \quad (\text{sur } U_{ij}), \quad h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0 \quad (\text{sur } U_{ijk}).$$

Soit $\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^\bullet)$ le complexe simple simple associé au bicomplexe de Čech de $\Omega_{X/k}^\bullet$; c'est le complexe de composante de degré n

$$\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} \check{C}^j(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^i)$$

et de différentielle $d = d' + d''$ où $d' : \check{C}^j(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^i) \rightarrow \check{C}^j(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^{i+1})$ est induit par la différentielle du complexe de De Rham et $d'' : \check{C}^j(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^i) \rightarrow \check{C}^{j+1}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^i)$ est égal à $(-1)^i d_i$, d_i étant la différentielle du complexe $\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^i)$.

L'augmentation naturelle $\Omega_{X/k}^\bullet \rightarrow \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^\bullet)$ définit un quasi-isomorphisme

$$(2.1.7) \quad \varepsilon : F_* \Omega_{X/k}^\bullet \longrightarrow F_* \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^\bullet).$$

D'autre part, (2.1.6) permet de définir un morphisme de complexes

$$(2.1.8) \quad \Omega_{X'/k}^1[-1] \longrightarrow F_* \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X/k}^\bullet)$$

qui, composé avec ε^{-1} , définit

$$(2.1.9) \quad \varphi_{(\tilde{X}, \mathcal{U}, (\tilde{F}_i))}^1 : \Omega_{X'/k}^1[-1] \longrightarrow F_* \Omega_{X/k}^\bullet .$$

On vérifie que (2.1.9) ne dépend ni du recouvrement \mathcal{U} choisi, ni des relèvements (\tilde{F}_i) . Il est alors clair que $\varphi_{\tilde{X}}^1 = \varphi_{(\tilde{X}, \mathcal{U}, (\tilde{F}_i))}^1$ induit l'isomorphisme de Cartier en cohomologie. Cela achève la démonstration de 2.1.

Corollaire 2.2 (dégénérescence de Hodge en caractéristique positive). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X un k -schéma propre et lisse de dimension $< p$, relevable sur $W_2(k)$. Alors la suite spectrale de Hodge vers De Rham*

$$(2.2.1) \quad E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega_{X/k}^i) \implies H_{DR}^*(X/k)$$

dégénère en E_1 .

Comme X est propre sur k , les $H^j(X, \Omega_{X/k}^i)$ sont des k -espaces vectoriels de dimension finie $h^{i,j}$. Il en est donc de même de $H_{DR}^n(X/k)$. Notons h^n sa dimension. La dégénérescence de (2.2.1) signifie donc que, pour tout n ,

$$\sum_{i+j=n} h^{i,j} = h^n,$$

ce qui découle de 2.1.

Corollaire 2.3 (Raynaud). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X un k -schéma projectif et lisse de dimension pure $< p$, relevable sur $W_2(k)$, et soit L un faisceau inversible ample sur X . Alors*

$$(2.3.1) \quad H^j(X, L \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j > d ,$$

$$(2.3.2) \quad H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j < d .$$

Par dualité de Serre, (2.3.1) et (2.3.2) sont équivalents. On prouve (2.3.2). Il existe n assez grand tel que $H^j(X, L^{\otimes p^n} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0$ pour tout $j > 0$ et tout i . Par dualité de Serre on a donc $H^j(X, L^{\otimes -p^n} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0$ pour tout $i + j < d$. Il suffit donc de prouver le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soient X un k -schéma lisse de dimension $< p$ relevable sur W_2k et M un faisceau inversible vérifiant*

$$(*) \quad H^j(X, M^{\otimes p} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j < d .$$

On a alors

$$H^j(X, M^{\otimes p} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j < d .$$

Soit M' le $\mathcal{O}_{X'}$ -module déduit de M par changement de base. On dispose de $F^*M \xrightarrow{\sim} M^{\otimes p}$, d'où, par la formule de projection, $H^j(X, M^{\otimes p} \otimes \Omega_{X/k}^i) = H^j(X', M'^{\otimes p} \otimes F_*\Omega_{X/k}^i)$ pour tout (i, j) . Il résulte alors de (*) et de la suite spectrale relative au foncteur $\Gamma(X', *)$ et au complexe $M' \otimes F_*\Omega_{X/k}^\bullet$ que, pour $n < d$, $H^n(X', M' \otimes F_*\Omega_{X/k}^\bullet) = 0$. Le lemme est alors une conséquence de 2.1.

Remarque 2.5. Dans [Ra] Raynaud construit une surface projective lisse X et un faisceau L inversible ample sur X tels que $H^1(X, L^{\otimes -1}) \neq 0$. Une telle surface ne se relève donc pas sur $W_2(k)$.

3. Dégénérescence et annulation en caractéristique nulle.

Théorème 3.1 (théorème de dégénérescence de Hodge). *Soit X un schéma propre et lisse sur un corps k de caractéristique nulle. Alors la suite spectrale de Hodge vers De Rham*

$$(3.1.1) \quad E_1^{ij} = H^j(X, \Omega_{X/k}^i) \implies H_{DR}^*(X/k)$$

dégénère en E_1 .

Prouver la dégénérescence de (3.1.1) revient à prouver que, pour tout n ,

$$\sum_{i+j=n} h^{ij} = h^n.$$

Des méthodes standard assurent l'existence d'un \mathbb{Z} -schéma intègre de type fini S et d'un morphisme $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ propre et lisse dont X se déduit par un changement de base $\text{Spec}(k) \rightarrow S$. La cohérence des $R^j f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^i$ entraînant celle des $R^n f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^\bullet$, on peut, quitte à restreindre S , supposer les $R^j f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^i$ libres de rang h^{ij} et les $R^n f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^\bullet$ libres de rang h^n , donc de formation compatible à tout changement de base. On peut aussi supposer S lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Si d désigne la dimension de X (supposé connexe), l'ouvert d'inversibilité de $d!$ contient un point fermé s dont le corps résiduel $k(s)$ est un corps fini de caractéristique $p > d$. La lissité de S/\mathbb{Z} permet de factoriser $\text{Spec}(k(s)) \rightarrow S$ en $\text{Spec}(k(s)) \rightarrow \text{Spec}(W_2(k(s))) \rightarrow S$. On a donc des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_s & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}_s & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k(s)) & \longrightarrow & \text{Spec}(W_2(k(s))) & \longrightarrow & S \end{array}$$

ce qui fournit un relèvement de \mathcal{X}_s sur $W_2(k(s))$. On conclut alors à l'aide de 2.1 et de la compatibilité des $R^j f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^i$ et des $R^n f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^\bullet$ au changement de base.

On démontre de manière analogue :

Théorème 3.2 (théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [KAN]). *Soient k un corps de caractéristique nulle et X un k -schéma projectif et lisse de dimension pure d , et soit L un faisceau inversible ample sur X . Alors*

$$(3.2.1) \quad H^j(X, L \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j > d,$$

$$(3.2.2) \quad H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega_{X/k}^i) = 0 \quad \text{si } i + j < d.$$

Bibliographie

- [D-I] P. DELIGNE et L. ILLUSIE, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de De Rham*, Inv. Math. **89** (1987), 247-270.
- [K] N. KATZ, *Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem*, Pub. Math. IHES **39** (1970), 175-232.
- [KAN] K. KODAIRA, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Ac. Sc. USA **39** (1953), 1268-1273.
- [Mum] D. MUMFORD, *Pathologies of modular surfaces*, Am. J. Math. **83** (1961), 339-342.
- [Ra] M. RAYNAUD, *Contre-exemple au \mathbb{p} -Vanishing Theorem en caractéristique $p > 0$* , in *C. P. Ramanujam - A tribute*, Studies in Mathematics **8** (1978), Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 273-278.
- [EGA IV] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Eléments de géométrie algébrique, IV*, Pub. Math. IHES **20** (1964) ; **24** (1965) ; **28** (1966) ; **32** (1967).