LES ROTATIONS DE $\mathbf{R}^3$: VERSION MATRICIELLE

1. L'espace $\mathbf{R}^n$

Les structures dont $\mathbf{R}^n$ est muni appartiennent à quatre niveaux :

***Structure vectorielle*:** Vecteur. Combinaison linéaire. Familles libres et liées. Sous-espaces vectoriels et affines. Base. Dimension. Matrice associée à une application linéaire. Le groupe linéaire général $GL_n(\mathbf{R})$.

***Structure euclidienne*:** Produit scalaire. Norme euclidienne. Angle non signé entre vecteurs. Orthogonalité. Bases orthogonales et orthonormées. Isométries. Symétries orthogonales. Rotations. Projections orthogonales. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$.

***Structure orientée*:** Déterminant. Aire et volume signés. Eléments d'aire et de volume pour les intégrales multiples. Orientation. Bases directes et indirectes. Le groupe linéaire spécial $SL_n(\mathbf{R})$.

***Structure euclidienne orientée*:** Angle signé entre vecteurs dans $\mathbf{R}^2$. Produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$. Bases orthonormées directes. Rotations d'un angle signé donné. Le groupe orthogonal spécial $SO_n(\mathbf{R})$.

Notre étudierons les rotations. En principe elles apparaissent déjà au niveau de la structure euclidienne de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Mais pour distinguer entre les rotations d'angle θ et d'angle $-\theta$ on a besoin d'orientations aussi.

Rappelons les produits scalaire et vectoriel, le déterminant (de matrices 2×2 et 3×3) et quelques autres notions liées.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbf{R}^3$ est

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{1.1}$$

Ce produit est *bilinéaire*, c'est à dire pour $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^3$ et $r \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}, \quad (r\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}), \\ \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}, \quad \vec{\mathbf{u}} \cdot (r\vec{\mathbf{v}}) = r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

C'est aussi *symétrique*, c-à-d vérifiant $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$. La *norme euclidienne* d'un vecteur est

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pour r un réel on a $\|r\vec{\mathbf{u}}\| = |r|\|\vec{\mathbf{u}}\|$. On a $\|\vec{\mathbf{u}}\| \geq 0$ pour tout $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^3$, et on a $\|\vec{\mathbf{u}}\| > 0$ pour tout $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

On a les inégalités de Cauchy-Schwarz et du triangle

$$|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|, \qquad \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\|. \tag{1.3}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de définir l'*angle* entre deux vecteurs non nuls par $0 \leq \theta \leq \pi$ et

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|}. \tag{1.4}$$

Deux vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ sont *orthogonaux* s'ils vérifient $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$, ou équivalemment si l'angle entre eux est $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Définition 1.1. Une *base orthogonale* de $\mathbf{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ ***non nuls*** avec

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0. \tag{1.5}$$

Une telle famille est toujours libre et ainsi une base de $\mathbf{R}^3$.[*]

Une *base orthonormée* de $\mathbf{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ avec

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\| = 1, \qquad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0. \tag{1.6}$$

C'est une base orthogonale dont tous les membres sont de norme 1.

La *base canonique* de $\mathbf{R}^3$ est orthonormée. Nous la noterons $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ avec

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0), \qquad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0), \qquad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1). \tag{1.7}$$

La base canonique de $\mathbf{R}^2$, notée $\vec{\mathbf{i}} = (1,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1)$ est aussi orthonormée. Il y a une infinité d'autres bases orthonormées. Par exemple

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \qquad \vec{\mathbf{u}}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \qquad \vec{\mathbf{u}}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2) \tag{1.8}$$

est orthonormée parce qu'on a bien $\vec{\mathbf{u}}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}_j = 0$ pour tout $i \neq j$ mais $\vec{\mathbf{u}}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}_i = 1$ pour tout i. Pour les mêmes raisons

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}), \qquad \vec{\mathbf{v}}_2 = (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}), \qquad \vec{\mathbf{v}}_3 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \tag{1.9}$$

est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

Les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base orthonormée sont particulièrement facile à calculer.

Proposition 1.2. *Soit $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Pour $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$ on a $\vec{\mathbf{x}} = a_1\vec{\mathbf{u}}_1 + a_2\vec{\mathbf{u}}_2 + a_3\vec{\mathbf{u}}_3$ avec $a_i = \vec{\mathbf{u}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}$ pour $i = 1,2,3$.*

Donc par exemple pour $\vec{\mathbf{x}} = (1,1,1)$ et la base orthonormée $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$ de (1.8) on a $\vec{\mathbf{u}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \sqrt{2}$ et $\vec{\mathbf{u}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\vec{\mathbf{u}}_3 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Donc on a $\vec{\mathbf{x}} = \sqrt{2}\vec{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{u}}_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{\mathbf{u}}_3$ par la proposition 1.2.

Pour le même $\vec{\mathbf{x}} = (1,1,1)$ et la base orthonormée $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ de (1.9) on a $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \frac{5}{3}$ et $\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}$ et $\vec{\mathbf{v}}_3 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}$. Donc on a $\vec{\mathbf{x}} = \frac{5}{3}\vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}}_2 + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}}_3$ par la proposition 1.2.

Preuve de la proposition 1.2. Comme $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$ est une base de $\mathbf{R}^3$ il existe a_1, a_2, a_3 tels qu'on ait $\vec{\mathbf{x}} = a_1\vec{\mathbf{u}}_1 + a_2\vec{\mathbf{u}}_2 + a_3\vec{\mathbf{u}}_3$. On a alors

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}} &= \vec{\mathbf{u}}_1 \cdot (a_1\vec{\mathbf{u}}_1 + a_2\vec{\mathbf{u}}_2 + a_3\vec{\mathbf{u}}_3) \\ &= a_1(\vec{\mathbf{u}}_1 \cdot \vec{\mathbf{u}}_1) + a_2(\vec{\mathbf{u}}_1 \cdot \vec{\mathbf{u}}_2) + a_3(\vec{\mathbf{u}}_1 \cdot \vec{\mathbf{u}}_3) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1.\end{aligned}$$

On a similairement $\vec{\mathbf{u}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = a_2$ et on a $\vec{\mathbf{u}}_3 \cdot \vec{\mathbf{x}} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = a_3$. □

Le produit scalaire se calcule en utilisant les coördonnées par rapport à une base orthonormée quelconque.

Proposition 1.3. *Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ et $\vec{\mathbf{x}} = a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + a_3\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{y}} = b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}$ des vecteurs. Alors on a $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

---

*. L'argument est le suivant. Soit $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ des vecteurs non nuls vérifiant (1.5), et soit r, s, t des réels avec $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$. Alors on a $0 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}) = r\|\vec{\mathbf{u}}\|^2$. Mais on a $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et ainsi $\|\vec{\mathbf{u}}\| > 0$. D'où $r = 0$. En faisant les produits scalaires de $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$ avec $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, on déduit $s = 0$ et $t = 0$.

Preuve. On développe

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} &= (a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + a_3\vec{\mathbf{w}}) \cdot (b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}) \\
&= a_1b_1\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}} + a_1b_2\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} + a_1b_3\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} + a_2b_1\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} + a_2b_2\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
&\qquad + a_2b_3\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} + a_3b_1\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{u}} + a_3b_2\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} + a_3b_3\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\
&= a_1b_1\cdot 1 + a_1b_2\cdot 0 + a_1b_3\cdot 0 + a_2b_1\cdot 0 + a_2b_2\cdot 1 \\
&\qquad + a_2b_3\cdot 0 + a_3b_1\cdot 0 + a_3b_2\cdot 0 + a_3b_3\cdot 1 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.4. Le *supplément orthogonal* d'un sous-espace vectoriel $E \subset \mathbf{R}^3$ est

$$E^\perp = \{\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^3 \mid \vec{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \text{ pour tout } \vec{\mathbf{e}} \in E\}.$$

Par exemple

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{R}(1,2,3)\big)^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid r(1,2,3)\cdot(x,y,z) = 0 \text{ pour tout } r \in \mathbf{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour un vecteur (a,b,c) dans $\mathbf{R}^3$ on

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{R}(a,b,c)\big)^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid r(a,b,c)\cdot(x,y,z) = 0 \text{ pour tout } r \in \mathbf{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.
\end{aligned}$$

C'est à dire, le supplément orthogonal de la droite vectorielle engendrée par (a,b,c) est le plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$.

Proposition 1.5. *Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Alors on a*

$$\big(\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}\big)^\perp = \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}, \qquad \big(\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}\big)^\perp = \mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}. \tag{1.10}$$

Preuve. Exercice. □

2. Le déterminant, le produit vectoriel, et orientations

Définition 2.1. Le *déterminant* d'une matrice 2×2 est

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1. \tag{2.1}$$

Notation. Quand on entoure un tableau rectangulaire de parenthèses $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ ou de crochets $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$ c'est une matrice. Quand on entoure un tableau carré de lignes verticales $\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$, c'est un déterminant.

Noter que quand on permute les deux colonnes de la matrice son déterminant change de signe. *Idem* quand on permute les deux lignes

$$\begin{vmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{vmatrix} = v_1u_2 - v_2u_1 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice 2×2 est apparu dans le premier cours d'algèbre linéaire comme une quantité qui est $\neq 0$ si et seulement si la matrice est inversible, et alors on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Définition 2.2. Le *produit vectoriel* de $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ est

$$\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.3}$$

Certains écrivent $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ au lieu de $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$.

Le produit vectoriel est bilinéaire : il vérifie des formules analogues à (1.2). Il est *anti-symétrique* dans le sens qu'on a

$$\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{u}}, \qquad \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Le produit vectoriel vérifie aussi

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\| \|\vec{\mathbf{v}}\| \sin\theta. \tag{2.4}$$

Les deux premières formules de (2.4) se vérifient par substitution. Pour la troisième on vérifie la formule $\|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})^2$ par substitution. Par (1.4) on a donc

$$\|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 \sin^2\theta$$

avec θ dans un intervalle où $\sin\theta \geq 0$.

Proposition 2.3. *Une famille $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ de deux vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ est libre si et seulement si on a $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Quand ceci est vérifié, le plan vectoriel orthogonal à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ est le plan engendré par $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$:*

$$\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3 \mid (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0\}. \tag{2.5}$$

Preuve. Montrons que les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont liés ssi $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Il y a deux cas : (i) Si $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ ou $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, alors $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont liés et satisfont à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = 0$. (ii) Si $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{v}} \neq 0$, alors ils sont liés ssi il existe $r \in \mathbf{R}$ non nul avec $\vec{\mathbf{u}} = r\vec{\mathbf{v}}$. Et par (2.4) ils satisfont à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ ssi on a $\sin\theta = 0$, qui signifie $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ et donc $\vec{\mathbf{u}} = r\vec{\mathbf{v}}$ avec $r > 0$ ou $r < 0$. Les deux conditions sont équivalentes.

Les formules (2.4) montrent qu'on a $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot (r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}}) = 0$ pour tout $r, s \in \mathbf{R}$. Donc on a l'inclusion $\subset$ dans (2.5). Quand $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont libres et donc $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, l'ensemble à gauche est un espace vectoriel de dimension 2, et l'ensemble à droite est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ ne contenant pas $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ (on a $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = \|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 > 0$). Donc l'ensemble à droite est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension < 3. Donc l'inclusion $\subset$ est une égalité $=$. □

Proposition 2.4. *Une famille $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de trois vecteurs est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si elle satisfait à*

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| = 1, \qquad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}. \tag{2.6}$$

Preuve. ($\Leftarrow$) Pour trois vecteurs vérifiant (2.6), l'angle θ entre $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ vérifie $0 \leq \theta \leq \pi$ et $\cos\theta = 0$ par la formule (1.4). Par conséquent $\sin\theta = 1$. Les formules (2.4) donnent les conditions manquantes de la définition d'une base orthonormée

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0,$$
$$\|\vec{\mathbf{w}}\| = \|\pm\, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\| \|\vec{\mathbf{v}}\| \sin\theta = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

($\Rightarrow$) Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Par le ($\Leftarrow$) ci-dessus $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Par conséquent $\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ sont tous les deux orthogonaux à $\vec{\mathbf{u}}$ et à $\vec{\mathbf{v}}$ et de norme 1. Ils sont donc des générateurs de norme 1 de la droite vectorielle orthogonale au plan vectoriel $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}$. Il y a exactement deux tels générateurs, qui sont opposés. Par conséquent $\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ sont égaux ou opposés. □

Définition 2.5. Le *déterminant* d'une matrice 3×3 est
$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1. \tag{2.7}$$

Pour trois vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbf{R}^3$ notons
$$P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$
Donc (2.7) est une formule pour $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$. En groupant les termes dans des différentes façons, on voit qu'on a
$$\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = (\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}. \tag{2.8}$$
On en déduit que le déterminant est invariant quand on fait une permutation cyclique des 3 colonnes
$$\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \det P(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}) = \det P(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}).$$
En revanche l'anti-symétrie du produit vectoriel implique que le déterminant change de signe quand on échange deux colonnes
$$\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = -\det P(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}) = -\det P(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}) = -\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}).$$

Proposition 2.6. *Une famille de trois vecteurs* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$ *si et seulement si on a* $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \neq 0$.

Preuve. Montrons que c'est une base ssi $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. C'est équivalent par (2.8).

Les trois vecteurs sont libres ssi $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ est libre et $\vec{\mathbf{w}} \notin \mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}$. Par la proposition 2.3 ces conditions sont équivalentes à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. Et ces deux conditions sont équivalentes à la seule $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. □

Définition 2.7. Une famille ordonnée de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ dans $\mathbf{R}^3$ est une *base directe* de $\mathbf{R}^3$ si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) > 0$. C'est une *base indirecte* si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) < 0$. (C'est une famille liée si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = 0$.)

Proposition 2.8. *Une base orthonormée* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ *satisfaisant à* $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ *dans* (2.6) *est directe. Elle satisfait aussi à* $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$ *et* $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}}$.

Une base orthonormée satisfaisant à $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ *est indirecte.*

Preuve. Une base orthonormée satisfaisant à (2.6) avec $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ vérifie $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 1$.

Une base orthonormée avec $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ vérifie $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = -\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = -1$. □

La base canonique $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ avec
$$\vec{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \qquad \vec{\mathbf{j}} = (0, 1, 0), \qquad \vec{\mathbf{k}} = (0, 0, 1) \tag{2.9}$$
est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$, ainsi que $\{(1, 0, 0), (0, \cos\theta, \sin\theta), (0, -\sin\theta, \cos\theta)\}$

Corollaire 2.9. *Soit* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ *une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$. *Alors* $\{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}\}$, $\{\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ *sont aussi des bases orthonormées directes de* $\mathbf{R}^3$, *comme aussi* $\{-\vec{\mathbf{u}}, -\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ *et* $\{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}, -\vec{\mathbf{w}}\}$.

Mais $\{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}\}$, $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}\}$, $\{\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}\}$, $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, -\vec{\mathbf{w}}\}$ *et* $\{-\vec{\mathbf{u}}, -\vec{\mathbf{v}}, -\vec{\mathbf{w}}\}$ *sont des bases orthonormées indirectes.*

Proposition 2.10. *Soit $\vec{\mathbf{u}}$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$ avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. Alors il existe vecteurs $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{w}}$ tels que $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ soit une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.*

Preuve. On choisit un vecteur $\vec{\mathbf{s}} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ avec $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = u_1x + u_2y + u_3z = 0$, et on pose $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{s}}$ et puis $\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{s}}\|}\vec{\mathbf{s}}$ et $\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{t}}\|}\vec{\mathbf{t}}$. Cela suffit par la proposition 2.4. □

Le produit vectoriel se calcule en utilisant les coördonnées par rapport à une base orthonormée ***directe*** quelconque.

Proposition 2.11. *Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée* ***directe*** *de $\mathbf{R}^3$ et $\vec{\mathbf{r}} = a_1\vec{\mathbf{u}}+a_2\vec{\mathbf{v}}+a_3\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{s}} = b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}$ des vecteurs. Alors*

$$\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{s}} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\mathbf{u}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\mathbf{v}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\mathbf{w}}.$$

Cette proposition se démontre par des substitutions comme la proposition 1.3 et en utilisant les formules $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}$, $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$ de la proposition 2.8.

Maintenant regardons les matrices $A \in M_3(\mathbf{R})$ qui induisent des isométries linéaires sur $\mathbf{R}^3$.

Définition 2.12. La *transposée* d'une matrice A est la matrice ${}^tA$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. C'est à dire si $A = (a_{ij})$ et ${}^tA = (b_{ij})$ avec a_{ij} et b_{ij} les coefficient dans la i-ème ligne et j-ème colonne, alors on a $b_{ij} = a_{ji}$.

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand on travaille avec des matrices, souvent on identifie les vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ avec les colonnes $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$. Le produit scalaire devient

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{u}\mathbf{v} \tag{2.10}$$

Pour les produits de matrices on a

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \tag{2.11}$$

parce que le coefficient dans la i-ème ligne et j-ème colonne de ${}^t(AB)$ comme de ${}^tB\,{}^tA$ est le produit (scalaire) de la j-ème ligne de A et de la i-ème colonne de B.

Les propriétés de base de déterminants sont les suivantes. Elles sont valables pour les déterminants de matrices carrées de toute taille, non seulement les déterminants de matrices 2×2 et 3×3 que nous traitons ici.

Théorème 2.13. (a) *Le déterminant d'une matrice identité vaut* 1 : $\det I_n = 1$.

(b) *Pour une matrice carrée A on a* $\det A = \det {}^tA$.

(c) *Pour A et B des matrices carrées de la même taille, on a* $\det AB = (\det A)(\det B)$.

(*d*) *On a* $\det A \neq 0$ *ssi* A *est inversible. Ceci est aussi équivalent à ce que le système linéaire de* n *équations en* n *inconnus (pour* $A = (a_{ij})$*)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

ait une solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ *pour tout* $(b_1, \ldots, b_n)$.

Quand A *est inversible, on a* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Les parties (a) et (b) du théorème sont faciles à vérifier pour les matrices 2×2 et 3×3 à partir des formules (2.1) et (2.7). Pour les parties (c) et (d) voir les cours d'algèbre linéaire.

3. Le groupe orthogonal $O(n, \mathbf{R})$

Définition 3.1. Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si elle satisfait à ${}^tAA = I_n$.

La condition d'être orthogonale s'écrit aussi

$$ {}^tA = A^{-1}. \tag{3.1}$$

L'ensemble

$$O(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ est orthogonale}\} \tag{3.2}$$

s'appelle le *groupe orthogonal*. Le mot “groupe” signifie que $O(n, \mathbf{R})$ contient l'identité I_n et qu'il est stable sous la multiplication de matrices et sous l'inverse de matrices. (La loi de groupe est la multiplication de matrices.) Voir le théorème 3.4.

L'ensemble

$$SO(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ est orthogonale et } \det A = 1\} \tag{3.3}$$

est le *groupe orthogonal spécial*.

Théorème 3.2. *Une matrice à coefficients réels*

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

est dans $O(3, \mathbf{R})$ *si et seulement si ses colonnes* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *forment une base orthonormée de* $\mathbf{R}^3$. *Elle est dans* $SO(3, \mathbf{R})$ *si et seulement si ses colonnes* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *forment une base* ***orthonormée directe*** *de* $\mathbf{R}^3$.

Preuve. Les lignes de ${}^tA$ sont ${}^t\mathbf{u}$, ${}^t\mathbf{v}$ et ${}^t\mathbf{w}$. Donc

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{v} \\ {}^t\mathbf{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{u}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{u}\mathbf{w} \\ {}^t\mathbf{v}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{v}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{v}\mathbf{w} \\ {}^t\mathbf{w}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{w}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{w}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est égale à la matrice identité I_3 si et seulement si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ satisfont à

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1, \qquad\qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{3.4}$$

qui sont les conditions (1.6) définissant une base orthonormée. Donc A est orthogonale si et seulement si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ est une base orthonormée.

La matrice A est spéciale orthogonale si en plus $\det A = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est égal à 1. Mais cette condition caractérise les bases orthonormées qui sont directes (voir (2.8)). $\square$

Par exemple les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

sont orthogonales parce que leurs colonnes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des bases orthonormées de $\mathbf{R}^3$. Mais A n'est pas dans $SO(3, \mathbf{R})$ parce que pour ses colonnes on a $\mathbf{w} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. En revanche B est dans $SO(3, \mathbf{R})$ parce que ses colonnes vérifient $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Théorème 3.3. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(a) *A est une matrice orthogonale.*
(b) *On a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$.*
(c) *On a $\|\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{u}\|$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$.*

Donc les matrices orthogonales sont les matrices des *isométries linéaires*, c'est à dire des isométries fixant l'origine. Elles préservent les normes de vecteurs et les angles entre vecteurs.

Preuve. (a) $\Leftrightarrow$ (b) : Par les formules (2.10) et (2.11) on a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\, I_3 \mathbf{v}, \qquad\qquad A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = {}^t(A\mathbf{u})(A\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}{}^tAA\mathbf{v}.$$

Ces deux quantités sont égales pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ si et seulement si on a $I_3 = {}^tAA$, ce qui caractérise les matrices orthogonales.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) : Les produits scalaires déterminent les normes et vice-versa par les formules

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

De cela on déduit facilement qu'une matrice préserve les normes ssi elle préserve les produits scalaires. $\square$

Théorème 3.4. (a) *La matrice I_3 est dans $O(3, \mathbf{R})$. De plus, si A et B sont dans $O(3, \mathbf{R})$, alors A^{-1} et AB sont dans $O(3, \mathbf{R})$.*

(b) *La matrice I_3 est dans $SO(3, \mathbf{R})$. De plus, si A et B sont dans $SO(3, \mathbf{R})$, alors A^{-1} et AB sont dans $SO(3, \mathbf{R})$.*

Preuve. (a) On a ${}^tI_3 I_3 = I_3 I_3 = I_3$. Donc on a $I_3 \in O(3, \mathbf{R})$.

De plus si on a ${}^tAA = I_3$ et ${}^tBB = I_3$, alors on a ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_3B = I_3$. Donc si A et B sont dans $O(3, \mathbf{R})$ alors AB est dans $O(3, \mathbf{R})$.

Enfin si ${}^tAA = I_3$ alors A est inversible avec inverse $A^{-1} = {}^tA$, et donc on a aussi $A\,{}^tA = I_3$. Mais comme ${}^{tt}A = A$, on a alors ${}^{tt}A{}^tA = I_3$. D'où, si A est dans $O(3, \mathbf{R})$, alors ${}^tA = A^{-1}$ est aussi dans $O(3, \mathbf{R})$.

(b) La partie (b) se déduit de la partie (a) et du théorème 2.13. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

4. Les isométries linéaires du plan $\mathbf{R}^2$

La *distance euclidienne* entre deux point $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Définition 4.1. Une *isométrie de l'espace euclidien* $\mathbf{R}^n$ est une application $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ telle que les distances euclidiennes satisfont à

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{dist}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dans $\mathbf{R}^n$.

Théorème 4.2. *Une application $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une isométrie de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ si et seulement si il existe $A \in O(n, \mathbf{R})$ and $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ tels qu'on ait $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.*

C'est à dire :
Les isométries de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ sont les compositions de translations $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} + \mathbf{b}$ et d'applications linéaires $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ associées à des matrices orthogonales A.

Définition 4.3. Une isométrie $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ est *directe* si la matrice $A \in O(n, \mathbf{R})$ satisfait à $\det A = 1$, et c'est *indirecte* si elle satisfait à $\det A = -1$.

Regardons maintenant les isométries linéaires du plan $\mathbf{R}^2$. Ce sont les $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ avec $A \in O(2, \mathbf{R})$. Alors on a

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

avec $\{\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2), \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)\}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ par l'analogue pour $n = 2$ du théorème 3.2. Que $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ soit une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ signifie qu'on a

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \qquad v_1^2 + v_2^2 = 1, \qquad u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0. \tag{4.1}$$

Rappelons qu'un vecteur du plan a une *forme polaire* $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Les deux premières conditions sur $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ signifient alors qu'il existe α et β avec $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\vec{\mathbf{v}} = (\cos\beta, \sin\beta)$. La troisième condition est alors

$$0 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

On trouve alors que $\alpha - \beta \equiv \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$. On a deux cas.
Dans le premier cas $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$: On a $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}} = (\cos\beta, \sin\beta) &= (\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2})) \\ &= (\cos\alpha\cos\tfrac{\pi}{2} - \sin\alpha\sin\tfrac{\pi}{2}, \sin\alpha\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\tfrac{\pi}{2}) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).\end{aligned} \tag{4.2}$$

parce qu'on a $(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. Dans ce cas la matrice est

$$A = R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

On a $\det R_\alpha = 1$ donc l'isométrie est directe.
Dans le deuxième cas $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$: On a $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}} = (\cos\beta, \sin\beta) &= (\cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}), \sin(\alpha - \tfrac{\pi}{2})) \\ &= (\cos\alpha\cos\tfrac{\pi}{2} + \sin\alpha\sin\tfrac{\pi}{2}, \sin\alpha\cos\tfrac{\pi}{2} - \cos\alpha\sin\tfrac{\pi}{2}) = (\sin\alpha, -\cos\alpha).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans ce cas la matrice est

$$A = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

On a $\det R_\alpha = -1$, donc l'isométrie est indirecte.

Théorème 4.4. *Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une isométrie linéaire directe dont la matrice est le R_α de* (4.3). *Alors f est la rotation d'angle α centrée à l'origine.*

Preuve. Ecrivons $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors f envoye

$$\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

Donc la norme r du vecteur est inchangé, mais l'action sur l'argument est $\theta \mapsto \theta + \alpha$. C'est l'action de la rotation d'angle α centrée à l'origine. □

Théorème 4.5. *Soit $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une isométrie linéaire indirecte dont la matrice est le S_α de* (4.5). *Alors g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $D_{\alpha/2} = \mathbf{R}(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$.*

Preuve. Il faut montrer que la restriction de g à $D_{\alpha/2}$ est $\mathrm{Id}_{D_{\alpha/2}}$, et que sa restriction au supplément orthogonal $D^\perp_{\alpha/2} = \mathbf{R}(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})$ est $-\mathrm{Id}_{D^\perp_{\alpha/2}}$. Mais g envoye

$$\begin{pmatrix} r\cos\frac{\alpha}{2} \\ r\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\frac{\alpha}{2} \\ r\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}) \\ r(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha - \frac{\alpha}{2}) \\ r\sin(\alpha - \frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\frac{\alpha}{2} \\ r\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

et il envoye

$$\begin{pmatrix} -r\sin\frac{\alpha}{2} \\ r\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin\frac{\alpha}{2} \\ r\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}) \\ -r(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\sin(\alpha - \frac{\alpha}{2}) \\ -r\cos(\alpha - \frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\frac{\alpha}{2} \\ -r\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc c'est bien l'identité sur $\mathbf{R}(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$, et $-\mathrm{Id}$ sur son supplément orthogonal. □

5. Les rotations dans $\mathbf{R}^3$

Il y a deux notions de rotations dans $\mathbf{R}^n$ en utilisation. Pour les distinguer on les appelera "rotations" et "isométries directes". Nous regarderons seulement les rotations linéaires, qui sont celles qui fixent l'origine $\vec{\mathbf{0}} = (0, 0, \ldots, 0)$. On verra que les deux notions sont équivalentes pour $\mathbf{R}^3$ [et $\mathbf{R}^2$] mais pas pour $\mathbf{R}^n$ avec $n \geq 4$. Informellement :

***Rotation*:** Une rotation fixe un sous-espace (affine ou vectoriel) de dimension $n-2$ dans $\mathbf{R}^n$ appelé l'*axe* — une droite dans $\mathbf{R}^3$, ou un point dans $\mathbf{R}^2$ — et agit sur les plans orthogonaux à l'axe dans la même manière qu'une rotation du plan.

***Isométrie directe*:** Une isométrie directe linéaire est une application linéaire $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ correspondant à un changement du système de coordonnées des coordonnées usuelles (x, y, z) (ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) vers les coordonnées par rapport à une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^n$.

Nous étudions les rotations dans $\mathbf{R}^3$ autour d'axes passant par l'origine $\vec{\mathbf{0}} = (0,0,0)$. Ces rotations-là envoyent $\vec{\mathbf{0}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$ et sont des ***applications linéaires*** de $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Pour décrire une telle application linéaire, il suffit de choisir une base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de $\mathbf{R}^3$ et donner $f(\vec{\mathbf{u}})$, $f(\vec{\mathbf{v}})$ et $f(\vec{\mathbf{w}})$ parce qu'un membre général de $\mathbf{R}^3$ s'écrit $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}$ avec $r, s, t \in \mathbf{R}$, et son image serait

$$f(r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}) = rf(\vec{\mathbf{u}}) + sf(\vec{\mathbf{v}}) + tf(\vec{\mathbf{w}}). \tag{5.1}$$

Maintenant soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. La rotation d'angle autour de $\vec{\mathbf{u}}$ (c'est à dire autour de l'axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$) devrait

(1) fixer l'axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$, et
(2) agir sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$ dans la même façon qu'une rotation du plan $\mathbf{R}^2$ d'angle θ centrée à l'origine. Ce plan orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$ est $\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}$.

Soit $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0)$ et $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1)$ les membres de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Alors la rotation de $\mathbf{R}^2$ d'angle θ centrée à l'origine est l'application linéaire Rot_θ avec

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{e}}_1) &= \cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\,\vec{\mathbf{e}}_2, \\ \mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{e}}_2) &= -\sin\theta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 5.1. Soit $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^3$ un vecteur avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. Par la proposition 2.10 il existe $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^3$ avec $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

La *rotation d'angle θ autour de* $\vec{\mathbf{u}}$ est l'application linéaire $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ avec

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{u}}) &= \vec{\mathbf{u}} \\ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{v}}) &= \cos\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{w}}, \\ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{w}}) &= -\sin\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \cos\theta\,\vec{\mathbf{w}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donc la matrice de l'application linéaire $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ dans la base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de $\mathbf{R}^3$ est

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Noter que les coefficients dans les lignes de (5.3) deviennent les coefficients dans les colonnes de (5.4).

Proposition 5.2. (*a*) *La rotation* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *d'angle θ autour de* $\vec{\mathbf{u}}$ *ne dépend pas du choix de* $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ *complétant la base orthonormée directe* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$.

(*b*) *Les rotations* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *et* $\mathrm{Rot}_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}$ *coïncident.*

(*c*) *Les rotations d'angles θ et $\theta + 2\pi n$ avec $n \in \mathbf{Z}$ coïncident.*

Comme $\vec{\mathbf{u}}$ et $-\vec{\mathbf{u}}$ engendrent le même axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$, une rotation autour de l'un est aussi une rotation autour de l'autre, mais dans le sens opposé.

La démonstration usuelle de cette proposition utilise des matrices de passage pour les changements de base. Nous allons démontrer plusieurs formules pour les matrices et quaternions associées à des rotations où il sera immédiatement visible que la rotation ne dépend que de θ et $\vec{\mathbf{u}}$, et qu'on a $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \mathrm{Rot}_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}$.

La proposition se vérifie par des calculs avec des matrices de passage pour des changements de base. Mais on peut éviter ces calculs-là en notant que dans (5.9) ci-dessous on a une formule pour $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ qui ne dépend que de $\vec{\mathbf{u}}$ et θ. Donc (a). De plus cette formule (5.9) est invariante quand on y substitue $(-\vec{\mathbf{u}}, -\theta)$ pour $(\vec{\mathbf{u}}, \theta)$. Donc (b).

Théorème 5.3. *Les rotations de* $\mathbf{R}^3$ *autour d'un* $\vec{\mathbf{u}}$ *fixé vérifient :*

$$\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},0} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}, \qquad \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\phi} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta+\phi}, \qquad \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}^{-1} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},-\theta}\,. \tag{5.5}$$

Preuve. La formule $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},0} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ est valide parce qu'en substituant $\theta = 0$ dans (5.4) on trouve la matrice identité $I = I_3$. La formule $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\phi} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta+\phi}$ est valide parce que le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ 0 & \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}.$$

La formule pour $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}^{-1}$ se déduit des deux autres. □

La matrice (5.4) décrit l'action de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ sur les coördonnées d'un vecteur par rapport à la base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$. En principe la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ par rapport à la base canonique $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ de (2.9) et les coördonnées usuelles se calcule dans la manière suivante.

Théorème 5.4. *Soit* $M \in M_3(\mathbf{R})$ *et soit* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *une base de* $\mathbf{R}^3$ *avec* $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$. *Supposons qu'on a*

$$\begin{aligned} M\mathbf{u} &= a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w}, \\ M\mathbf{v} &= b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}, \\ M\mathbf{w} &= c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $M = PAP^{-1}$.

Preuve. Les trois colonnes du produit MP sont $M\mathbf{u}$, $M\mathbf{v}$ et $M\mathbf{w}$. Les trois colonnes de PA sont $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w}$, $b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}$ et $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}$. Les équations (5.6) sont ainsi équivalentes à $MP = PA$. On en déduit $M = MPP^{-1} = PAP^{-1}$. □

Maintenant écrivons $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Soit A_θ la matrice de (5.4). Selon le théorème 5.4 la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ dans la base canonique est alors

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = PA_\theta P^{-1}. \tag{5.8}$$

Cette formule a son intérêt, mais beaucoup de calculs on utilise une autre formule.

Théorème 5.5 (Formule de Rodrigues)**.** *Pour tout* $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$ *on a*

$$\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{x}}) = \cos\theta\, \vec{\mathbf{x}} + (1-\cos\theta)(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}} + \sin\theta\, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{x}}. \tag{5.9}$$

Preuve. Soit $f(\vec{\mathbf{x}})$ le membre de droite de l'équation (5.9). Alors l'application $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est une combinaison linéaire de trois applications linéaires. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}$. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{x}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto -\vec{\mathbf{v}}$. La matrice de f dans la base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ est alors

$$\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et c'est la même que (5.4). □

La formule de Rodrigues (5.9) permet de calculer les images des vecteurs $\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ et $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ et donc la matrice $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ par rapport à la base canonique.

Théorème 5.6. *Soit* $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ *avec* $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$*, et soit* $\theta \in \mathbf{R}$*. Alors la matrice de la rotation* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *est*

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Preuve. Par la formule de Rodrigues l'application $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est la combinaison linéaire de trois applications linéaires. La matrice de la première application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ est la matrice identité. La deuxième application envoye

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0) \mapsto (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{i}})\vec{\mathbf{u}} = u_1(u_1,u_2,u_3) = (u_1^2, u_1u_2, u_1u_3).$$

Donc la première colonne de la deuxième matrice est $\left(\begin{smallmatrix} u_1^2 \\ u_1u_2 \\ u_1u_3 \end{smallmatrix}\right)$. La troisième application envoye

$$\vec{\mathbf{i}} \mapsto \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{i}} = (0, u_3, -u_2).$$

Donc la première colonne de la troisième matrice est $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{smallmatrix}\right)$. Les autres colonnes se calculent similairement en utilisant $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$. □

Exemple 5.7. Quelle est la matrice E de la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ autour de $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,1)$? On remarque d'abord que $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. Le $\vec{\mathbf{u}}$ parallèle avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$ est $\frac{1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $1-\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc la matrice est

$$E = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6. Déduire $(\vec{\mathbf{u}}, \theta)$ de la matrice d'une rotation

Supposons que A est une matrice spéciale orthogonale. Alors A est la matrice d'une rotation. Mais comment trouve-t-on l'axe $\vec{\mathbf{u}}$ et l'angle θ de cette rotation ?

Une complication : vu que les matrices de rotations satisfont à

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = R_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}, \qquad R_{\vec{\mathbf{u}},-\theta} = R_{-\vec{\mathbf{u}},\theta} = {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = R^{-1}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$$

le vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ et l'angle θ sont bien définis seulement à signe près, et les différents choix de signes $\pm\vec{\mathbf{u}}$ et $\pm\theta$ correspondent à deux matrices spéciales différentes (sauf quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$) qui sont inverses.

Définition 6.1. La *trace* d'une matrice dans $M_3(\mathbf{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Par exemple pour les trois matrices apparaissant dans la version matricielle (5.9) de la formule de Rodrigues on a

$$\operatorname{Tr} I_3 = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1+1+1 = 3,$$

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = 1, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} = 0+0+0 = 0.$$

et on a aussi

$$\operatorname{Tr} A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1 + \cos\theta + \cos\theta = 1 + 2\cos\theta. \tag{6.2}$$

Les propriétés élémentaires de la trace sont bien connues.

Théorème 6.2. *Soit $A, B, P \in M_3(\mathbf{R})$ avec P inversible, et soit $r \in \mathbf{R}$.*
(*a*) *On a $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$, et on a $\operatorname{Tr}(rA) = r\operatorname{Tr} A$, et aussi $\operatorname{Tr}{}^tA = \operatorname{Tr} A$.*
(*b*) *On a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ et on a $\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr} A$.*

Preuve. Exercice. □

Théorème 6.3. *Soit $A = R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \in SO(3,\mathbf{R})$ la matrice d'une rotation d'angle θ. Alors θ satisfait à*

$$\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\theta$$

et donc

$$\boxed{\theta \equiv \pm \arccos\frac{\operatorname{Tr}(A) - 1}{2} \pmod{2\pi}.}$$

Preuve. La première formule se déduit soit de

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \operatorname{Tr}(PA_\theta P^{-1}) = \operatorname{Tr} A_\theta = 1 + 2\cos\theta,$$

soit de (5.10) et (6.1) et donc

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \cos\theta \cdot 3 + (1-\cos\theta)\cdot 1 + \sin\theta \cdot 0 = 1 + 2\cos\theta.$$

La deuxième formule se déduit de la première. □

Par exemple pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

on a $\operatorname{Tr} B = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + 0 = 1$. Donc $\cos\theta = \frac{\operatorname{Tr}(B)-1}{2} = 0$ et $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Théorème 6.4. *Soit $A = R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice d'une rotation non triviale ($A \neq I_3$) autour de l'axe engendré par un $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ un vecteur non nul satisfaisant à $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Alors on a $\mathbf{u} = \pm\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$.*

$$\boxed{(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \neq 0, \qquad\qquad \mathbf{u} = \pm\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}.}$$

Pour la matrice B ci-dessus on a

$$B - I = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & -\frac{9}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on cherche les $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ tels que

$$\begin{pmatrix} -\frac{16}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & -\frac{9}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est le système linéaire

$$\begin{cases} -\frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{4}{5}z = 0, \\ \frac{12}{25}x - \frac{9}{25}y + \frac{3}{5}z = 0, \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - z = 0. \end{cases}$$

En remplaçant les deuxième et troisième équations par $(E_2') = (E_2) + \frac{3}{4}(E_1)$ et $(E_3') = (E_3) + \frac{5}{4}(E_1)$, on trouve un système linéaire équivalent

$$\begin{cases} -\frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{4}{5}z = 0, \\ 0 = 0, \\ -2z = 0. \end{cases}$$

On peut prendre y comme variable libre, et on trouve $z = 0$ et $x = \frac{3}{4}y$. Donc $\vec{\mathbf{x}} = (3, 4, 0)$ est une solution non nulle, et l'axe de la rotation de matrice B est engendré par le vecteur de norme 1

$$\vec{\mathbf{u}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}}(3, 4, 0) = \pm(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0).$$

Alors B est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{\mathbf{u}} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. Mais quel est le signe de l'angle (en fixant $\vec{\mathbf{u}}$) ? Pour répondre, on a besoin de quelques notions.

Définition 6.5. Une matrice $A \in M_3(\mathbf{R})$ est *symétrique* si elle satisfait à $A = {}^tA$. Une matrice $B \in M_3(\mathbf{R})$ est *anti-symétrique* si elle satisfait à $B = -{}^tB$. De telles matrices ont les formes

$$A = \begin{pmatrix} a & r & s \\ r & b & t \\ s & t & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.6. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$ une matrice. Alors*

$$A^{\text{sym}} = \tfrac{1}{2}(A + {}^tA) \qquad A^{\text{anti}} = \tfrac{1}{2}(A - {}^tA) \tag{6.4}$$

sont respectivement symétrique et anti-symétrique et satisfont à $A = A^{\text{sym}} + A^{\text{anti}}$. C'est le seul couple de matrices symétrique et anti-symétrique dont la somme est A.

Preuve. Exercice. □

Définition 6.7. On appelle $A^{\text{sym}} = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ la *partie symétrique* de A et $A^{\text{anti}} = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ la *partie anti-symétrique*.

Les matrices R et $R^{-1} = {}^tR$ des rotations d'angles $\pm\theta$ autour de $\pm\vec{\mathbf{u}}$ sont transposées. Par conséquent, elles ont les mêmes parties symétriques, mais des parties anti-symétriques opposées

$$\tfrac{1}{2}(R + {}^tR) = \tfrac{1}{2}({}^tR + R), \qquad \tfrac{1}{2}(R - {}^tR) = -\tfrac{1}{2}({}^tR - R)$$

Donc pour déterminer le signe de θ avec $\vec{\mathbf{u}}$ fixé (ou vice-versa), on peut regarder la partie anti-symétrique de la matrice de rotation.

La forme matricielle (5.10) de la formule de Rodrigues écrit la matrice de rotation $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ comme une combinaison linéaire de trois matrices. Les deux premières sont des matrices symétriques. La troisième est anti-symétrique. Donc la partie symétrique de $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est

$$\tfrac{1}{2}(R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} + {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta}) = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix}.$$

La partie anti-symétrique de $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est

$$\tfrac{1}{2}(R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} - {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta}) = \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.8. *Soit $A = R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$. Alors on a*

$$\sin\theta\,(u_1, u_2, u_3) = \Big(\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \frac{a_{21} - a_{12}}{2}\Big). \tag{6.5}$$

Comme on a $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$, cela nous donne une formule

$$|\sin\theta| = \Big\|\Big(\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \frac{a_{21} - a_{12}}{2}\Big)\Big\| \tag{6.6}$$

en plus de la formule $|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$.

La matrice B ci-dessus se décompose en parties symétrique et anti-symétrique

$$B = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

On déduit qu'on a $\sin\theta\,(u_1, u_2, u_3) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$. On a $|\sin\theta| = \left\|\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)\right\| = 1$ (mais on a déjà vu qu'on a $\cos\theta = 0$, et cela implique $|\sin\theta| = 1$). En prenant $\sin\theta = -1$, on déduit que B est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$.

Exemple 6.9. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est dans $SO(3, \mathbf{R})$ et est donc une matrice de rotation. On a $\mathrm{Tr}(C) = 0$. Donc l'angle θ de la rotation satisfait à $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(C)-1}{2} = -\frac{1}{2}$. On a donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Aussi $|\sin\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La partie anti-symétrique de C est

$$C^{\mathrm{anti}} = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}\,{}^tC = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'angle et le vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$ dans l'axe de la rotation satisfont alors à $(\sin\theta)\vec{\mathbf{u}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si on choisit le signe $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $\vec{\mathbf{u}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Donc C est la matrice de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (ou autour du vecteur parallèle $(1,1,1)$).

Dans l'exemple 5.7 on a calculé la matrice E de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ avec le même axe. Comme l'angle de l'exemple actuel est le double de l'angle précédent, on devrait avoir $E^2 = C$. Ceci se confirme par calcul.

Exemple 6.10. La matrice

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

est dans $SO(3, \mathbf{R})$. Sa trace est $\mathrm{Tr}(D) = -1$, donc on a $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(D)-1}{2} = -1$ et $\theta = \pi$. On a $\sin\theta = 0$. La matrice D est symétrique. Sa partie anti-symétrique est 0, et elle nous fournit l'information $(\sin\theta)\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ et donc $|\sin\theta| = \|\vec{\mathbf{0}}\| = 0$, mais elle ne nous fournit pas l'axe. Pour l'axe on cherche un $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ avec $(D - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Donc on résout le système

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont les (x, y, z) multiples de $(1,1,1)$. Donc on a encore $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Les signes ne sont pas importants cette fois parce que les rotations d'angles π et $-\pi$ autour du même axe coïncident. En comparant aux exemples précédents on a $E^3 = EC = CE = D$.

7. Isométries linéaires indirectes de $\mathbf{R}^3$

Définition 7.1. Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Alors *l'anti-rotation d'angle θ autour de* $\vec{\mathbf{u}}$ est l'application linéaire $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ avec

$$\begin{aligned} g(\vec{\mathbf{u}}) &= -\vec{\mathbf{u}} \\ g(\vec{\mathbf{v}}) &= \quad \cos\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{w}}, \\ g(\vec{\mathbf{w}}) &= -\sin\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \cos\theta\,\vec{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Donc la matrice de g dans la base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ est

$$G_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Deux cas importants sont $\theta = \pi$ et $\theta = 0$. Alors les matrices sont

$$G_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3, \qquad G_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $G_\pi = -I_3$ est la matrice de l'application linéaire $\vec{\mathbf{x}} \mapsto -\vec{\mathbf{x}}$, qui est la symétrie par rapport à l'origine $\vec{\mathbf{0}}$. Mais G_0 est la matrice de l'application linéaire qui sur le plan $\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}$ est l'identité $b\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}} \mapsto b\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}}$, mais qui sur le supplément orthogonal $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} = \big(\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}\big)^\perp$ est l'opposé de l'identité $a\vec{\mathbf{u}} \mapsto -a\vec{\mathbf{u}}$. Donc G_0 est la matrice dans la base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de la symétrie orthogonale (ou réflexion) de $\mathbf{R}^3$ par rapport au plan $\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}$. Noter que

$$G_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'anti-rotation d'angle θ autour de $\vec{\mathbf{u}}$ est la composition de la rotation d'angle θ autour de $\vec{\mathbf{u}}$ et de la réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport au plan $\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}} = \big(\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}\big)^\perp$ orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$. L'ordre de la composition n'est pas important parce que les deux opérations commutent.

Etant donné une matrice orthogonale $B \in O(3, \mathbf{R})$ avec $\det B = -1$, on peut trouver le $\vec{\mathbf{u}}$ et θ tel que B soit la matrice de l'anti-rotation d'angle θ autour de $\vec{\mathbf{u}}$. Il y a quelques détails légèrement différents des rotations. D'abord on a $\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} G_\theta = -1 + 2\cos\theta$, d'où

$$|\theta| = \arccos \frac{\operatorname{Tr} B + 1}{2}. \tag{7.1}$$

Deuxièmement les vecteurs dans l'axe ne sont pas fixes mais sont envoyés par B en leurs opposés. D'où on a $B\vec{\mathbf{u}} = -\vec{\mathbf{u}}$ et

$$(B + I)\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \|\vec{\mathbf{u}}\| = 1. \tag{7.2}$$

Mais on a toujours

$$\frac{1}{2}\big(B - {}^tB\big) = \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Exemple 7.2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Les trois colonnes $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vérifient $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0$ et $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 1$, donc B est orthogonale. Mais on a $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$, donc $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ est une base orthonormée ***indirecte*** de $\mathbf{R}^3$, et on a $\det B = -1$. On a $\operatorname{Tr} B = -1 + 2\cos\theta = 1$, donc $\theta = 0$, et B est la matrice d'une symétrie orthogonale. Pour trouver l'axe, qui est l'orthogonal du plan de la symétrie, on cherche les (x, y, z) tels qu'on ait

$$(B + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout le système et on trouve $(x, y, z) = z(-1, 2, 1)$. Donc on a $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$, et B est la matrice de la symétrie orthogonal par rapport au plan $(\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}})^\perp = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$.

Exemple 7.3. Soit

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Les trois colonnes sont encore orthonormées avec $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$. Donc C est la matrice d'une anti-rotation. L'angle vérifie $-1 + 2\cos\theta = \operatorname{Tr} C = \frac{1}{3}$, donc on a $\cos\theta = \frac{2}{3}$ et $|\theta| = \arccos\frac{2}{3}$. Pour trouver le $\vec{\mathbf{u}}$ engendrant l'axe, on résout

$$(C + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $(x, y, z) = y(0, 1, -2)$, et $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)$. Finalement la partie anti-symétrique de C est

$$\tfrac{1}{2}\big(C - {}^tC\big) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\sin\theta\,\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{3}(0, 1, -2)$ et ainsi $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} > 0$. Donc on a $\theta = \arccos\frac{2}{3} > 0$. Donc C est la matrice de la composition de la rotation d'angle $\theta = \arccos\frac{2}{3}$ autour de l'axe engendré par $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$, qui est $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

8. Vecteurs propres

Théorème 8.1. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Alors A est la matrice d'une rotation si et seulement si A est dans $SO(3, \mathbf{R})$.*

Pour démontrer ce théorème il faut connaitre aussi les notions de valeur propre et de vecteur propre.

Définition 8.2. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes. Un nombre complexe λ est une *valeur propre* de A si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Pour une valeur propre λ de A le sous-espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) \subset \mathbf{C}^n$ n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Il s'appelle l'*espace propre* de A associé à la valeur propre λ. Ses membres sont les *vecteurs propres* associés à la valeur propre λ.

Quand on a $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, le sous-espace réel $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) \subset \mathbf{R}^n$ est aussi appelé l'espace propre de A associé à λ.

Un vecteur propre $\mathbf{v}$ de A associé à la valeur propre λ satisfait à $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Donc il vérifie

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{8.1}$$

avec $A \in M_n(\mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$. Cette équation est souvent appelée l'équation des valeurs propres.

Proposition 8.3. *Soit $R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$. Supposons $R_{\mathbf{u},\theta} \neq I_3$ (c'est à dire $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$). Alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de $R_{\mathbf{u},\theta}$, et les vecteurs propres associés sont les $r\mathbf{u}$ avec $r \in \mathbf{R}$.*

Preuve. Pour $\lambda = 1$ l'équation des valeurs propres est $R_{\mathbf{u},\theta}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, et ceci est vérifié pour les $\mathbf{x}$ qui sont fixés par $R_{\mathbf{u},\theta}$. Pour une rotation non triviale ce sont exactement les vecteurs dans l'axe $\mathbf{Ru}$ de la rotation. $\square$

La clé du théorème 8.1 est le lemme suivant, qui sera démontré dans le paragraphe suivant.

Lemme 8.4. *Soit A dans $SO(3, \mathbf{R})$. Alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.*

Preuve du théorème 8.1. ($\Rightarrow$) Soit $R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour d'un $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ la base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ de la définition 5.1. Soit A_θ et P les matrices de (5.4) et (5.7). Par (5.8) on a $R_{\mathbf{u},\theta} = PA_\theta P^{-1}$. Or P est dans $SO(3, \mathbf{R})$ parce que ses colonnes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ forment une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Et A_θ et dans $SO(3, \mathbf{R})$ parce que ses colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ sont aussi une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Par le théorème 3.4 les matrices P^{-1} et $R_{\mathbf{u},\theta} = PA_\theta P^{-1}$ sont aussi dans $SO(3, \mathbf{R})$.

($\Leftarrow$) Comme I_3 est une matrice de rotation (d'angle 0), il suffit de montrer que tout $A \neq I_3$ dans $SO(3, \mathbf{R})$ est une matrice de rotation. Par le lemme 8.4 une telle A a $\lambda = 1$ comme une valeur propre. Soit $\mathbf{z}$ un vecteur propre non nul associé (donc vérifiant $A\mathbf{z} = \mathbf{z}$ et $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). En posant $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|}\mathbf{z}$, on trouve un vecteur propre vérifiant $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ et $\|\mathbf{u}\| = 1$. Par la proposition 2.10 on peut compléter $\mathbf{u}$ en une base orthonormée directe $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de $\mathbf{R}^3$.

On a $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Par la proposition 3.3 on a $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$. On en déduit qu'on a $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ et $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$. Donc $A\mathbf{v}$ et $A\mathbf{w}$ sont orthogonaux à $\mathbf{u}$. Mais $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ engendrent le plan vectoriel orthogonal à $\mathbf{u}$. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $A\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ et $A\mathbf{w} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$. Mais par les propositions 1.3 et 3.3 on a aussi

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a^2 + b^2, \\
0 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = ac + bd, \\
1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c^2 + d^2.
\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $(a,b),(c,d) \in \mathbf{R}^2$ sont sur le cercle unité du plan $\mathbf{R}^2$ et sont orthogonaux. Il existe donc $\theta \in \mathbf{R}$ avec $(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $(c,d) = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)$. On a ainsi

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \mathbf{u} \\ A\mathbf{v} &= \qquad \cos\theta\,\mathbf{v} + \sin\theta\,\mathbf{w}, \\ A\mathbf{w} &= \quad \pm(-\sin\theta\,\mathbf{v} + \cos\theta\,\mathbf{w}). \end{aligned}$$

La matrice dans la base $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ de l'application linéaire $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ envoyant $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est donc une des matrices suivantes

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si P est la matrice de colonnes $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$, alors on a $A = PA_\theta P^{-1}$ ou $A = PB_\theta P^{-1}$. On a $\det A = 1$ parce que A est dans $SO(3,\mathbf{R})$, mais par le théorème 2.13 on a

$$\det PB_\theta P^{-1} = (\det P)(\det B_\theta)\frac{1}{\det P} = \det B_\theta = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Donc on a $A \neq PB_\theta P^{-1}$. Par conséquent $A = PA_\theta P^{-1}$, et A est la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\mathbf{u}$. □

9. Annexe : l'existence de vecteurs propres pour $\lambda = \pm 1$ pour $A \in O(3,\mathbf{R})$

Dans ce paragraphe on démontre le lemme 8.4. On utilise la notion suivante.

Définition 9.1. Soit $A \in M_3(\mathbf{C})$. Soit T un indéterminé, et $\mathbf{C}[T]$ l'anneau de polynômes en T à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Le *polynôme caractéristique* de A est le déterminant

$$P_A(T) = \det(A - TI_3) = \begin{vmatrix} a_{11} - T & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - T & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - T \end{vmatrix} = \det A - c_2(A)T + \mathrm{Tr}(A)T^2 - T^3$$

En développant on trouve un polynôme de degré 3 dont les coefficients dépendent des coefficients de A. Le terme de degré 3 est $-T^3$. Le terme constant se calcule en posant $T = 0$, et donc $P_A(0) = \det(A - 0I_3) = \det A$. Les coefficients de T et de T^2 nous intéresse moins ici.

Or un polynôme de degré 3 dans $\mathbf{C}[T]$ se factorise comme

$$P(T) = a(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

avec $a \in \mathbf{C}^*$, et avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$ les *racines* de $P(T)$, les seuls nombres complexes vérifiant $P(\lambda_i) = 0$. Pour le polynôme caractéristique de $A \in M_3(\mathbf{C})$ comme ci-dessus on a $a = -1$.

Théorème 9.2. *Soit $A \in M_3(\mathbf{C})$ et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du polynôme caractéristique de A tel qu'il y ait une factorisation $P_A(T) = (\lambda_1 - T)(\lambda_2 - T)(\lambda_3 - T)$. Alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A, et on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$.*

Preuve. Les λ_i sont les nombres complexes λ vérifiant $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$. Mais le déterminant d'une matrice 3×3 est 0 ssi la matrice est non inversible, et les $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $A - \lambda I_3$ est non inversible sont par définition les valeurs propres de A.

Pour la dernière partie de l'énoncé : les deux formules pour $P_A(T)$ donnent $P_A(0) = \det(A - 0I_3) = \det A$ et $P_A(0) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0)(\lambda_3 - 0) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Donc on a $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. □

Théorème 9.3. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Si $\mu \in \mathbf{C}$ est une valeur propre (non réelle) de A, alors son conjugué $\overline{\mu}$ est aussi une valeur propre de A.*

Preuve. Pour $A \in M_3(\mathbf{R})$ le polynôme caractéristique $P_A(T) = \det(A - TI_3) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3$ a des coefficients réels donc vérifiant $\overline{a_i} = a_i$. On en déduit que pour tout nombre complexe μ on a $\overline{P_A(\mu)} = P_A(\overline{\mu})$. Donc si on a $P_A(\mu) = 0$ on a aussi $P_A(\overline{\mu}) = \overline{P_A(\mu)} = 0$. Comme les racines de $P_A(T)$ sont les valeurs propres de A, cela démontre le théorème. $\square$

Théorème 9.4. *Soit $A \in O(3, \mathbf{R})$ et λ un valeur propre* ***réelle*** *de A. Alors $\lambda = \pm 1$.*

Preuve. Les vecteurs propres $\mathbf{x}$ associées aux valeurs propres réelles λ d'une matrice réelle A sont les solutions non nulles du système linéaire $(A - \lambda I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ à coefficients réels, et on peut trouver des solutions réelles. Donc il y a un vecteur propre $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ avec $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Par le théorème 3.3 on a

$$\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

En divisant par $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ on trouve $|\lambda| = 1$. $\square$

Preuve du lemme 8.4. Soit $A \in SO(3, \mathbf{R})$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois racines de son polynôme caractéristique. Par le théorème 9.2 on a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A = 1$. Il faut montrer qu'au moins une des λ_i vaut 1. On distingue deux cas.

Cas 1. Si toutes les valeurs propres λ_i sont réelles, alors elles valent toutes 1 ou -1 par le théorème 9.4. Comme leur produit est 1 on a soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ soit $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ à ordre près. Dans les deux sous-cas, 1 est parmi les valeurs propres de A, comme on avait à démontrer.

Cas 2. Si une des valeurs propres est non réelle, disons $\lambda_1 = \mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, alors son conjugué est aussi une valeur propre, disons $\lambda_2 = \overline{\mu}$. Soit $\lambda_3 = \lambda$ la troisième valeur propre. On a $1 = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \mu \overline{\mu} \lambda = |\mu|^2 \lambda$. On en déduit que λ est réelle et positive. Par le théorème 9.4 on a donc $\lambda = 1$. Donc 1 est encore parmi les valeurs propres de A. $\square$