L1 SF 2015 : Option Maths 2 — Feuille n° 1

I. Calculer les angles entre les couples de vecteurs suivants.

(a) $(1,0)$ et $(1,1)$ dans $\mathbf{R}^2$.

(b) $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$ dans $\mathbf{R}^3$

(c) $(2,0,3)$ et $(3,4,0)$ dans $\mathbf{R}^3$

II. Lesquelles des familles suivantes de vecteurs sont libres ?

(a) $\{(1,0)\}$ dans $\mathbf{R}^2$

(b) $\{(2,0),(1,1)\}$ dans $\mathbf{R}^2$

(c) $\{(1,1),(2,0),(0,2)\}$ dans $\mathbf{R}^2$,

(d) $\emptyset = \{\}$ dans $\mathbf{R}^3$

(e) $\{(1,1,1),(2,1,0),(0,1,2)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

(f) $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

III. Dans $\mathbf{R}^3$ considérons le plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

(a) Donner une base $\mathcal{B}_P$ de P.

(b) Expliquer pourquoi $\mathcal{B}_P$ est ou n'est pas une base de $\mathbf{R}^3$.

(c) Donner une base de $\mathbf{R}^3$ contenant $\mathcal{B}_P$.

IV. Pour les familles suivantes de vecteurs : (i) vérifier que ce sont des familles orthogonales, (ii) normaliser les vecteurs pour obtenir des familles orthonormées, et (iii) compléter les familles normalisées en des bases orthonormées des espaces indiqués.

(a) $\{(1,1)\}$ dans $\mathbf{R}^2$

(b) $\{((1,2,2),(2,1,-2)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

(c) $\{(1,1,1)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

V. Pour les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ donnés, trouver $\vec{\mathbf{v}}$ tel que $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ soit une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^2$.

$$(0,1), \qquad (-1,0), \qquad \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \qquad \tfrac{1}{\sqrt{13}}(-2,3), \qquad (\cos\theta, \sin\theta).$$

VI. Lesquelles des couples de bases suivantes des espaces indiqués ont la même orientation ?

(a) $\{(1,0),(0,1)\}$ et $\{(1,1),(2,3)\}$ dans $\mathbf{R}^2$.

(b) $\{(1,0),(0,1)\}$ et $\{(2,3),(1,1)\}$ dans $\mathbf{R}^2$.

(c) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ et $\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,0,1)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

(d) $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)$ et $\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,0,1)\}$ dans $\mathbf{R}^3$

VII. Pour chaque matrice A suivante :

(i) Dire si A est la matrice d'une rotation ou d'une symétrie orthogonale, ou autre chose.

(ii) Si A est la matrice d'une rotation, donner l'angle θ de la rotation.

(iii) Si A est la matrice d'une symétrie orthogonale, donner un vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ engendrant l'axe de symétrie (Indication : résoudre le système $(A-I)\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

VIII. Considérons les trois produits de matrices :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Lesquelles des six matrices ci-dessus sont des matrices de rotations ? Lesquelles sont des matrices des symétries orthogonales ?

(b) Calculer les trois produits de matrices.

(c) Lesquels des trois matrices produits sont des matrices de rotations ? Lesquelles sont des matrices des symétries orthogonales ?

IX. Même questions que dans l'exercice précédent pour les produits suivants. **En plus** donner les angles des rotations et les angles à l'horizontal des axes des symétries orthogonales.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

X. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

XI. Calculer les produits vectoriels suivants dans $\mathbf{R}^3$:

(a) $(1,0,0) \wedge (0,0,1)$ et $(0,0,1) \wedge (1,0,0)$.

(b) $(1,1,1) \wedge (1,2,-3)$ et $(1,2,-3) \wedge (1,1,1)$.

(c) $(1,0,0) \wedge (x,y,z)$ et $(x,y,z) \wedge (1,0,0)$.