L1 SF 2014-5 : Option Maths 2 Feuille n° 2

I. Quelle est la matrice $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ de la rotation d'angle θ autour de l'axe engendré par $\vec{\mathbf{u}}$ dans les cas suivants. **Attention !** Les générateurs donnés des axes ne sont pas toujours de norme 1.

$\vec{\mathbf{u}} = (0,0,1)$ et θ général.	$\vec{\mathbf{u}} = (2,2,1)$ et $\theta = \pi$.
$\vec{\mathbf{u}} = (0,1,0)$ et θ général.	$\vec{\mathbf{u}} = (2,2,1)$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
$\vec{\mathbf{u}} = (0,1,1)$ et $\theta = \pi$.	$\vec{\mathbf{u}} = (1,1,1)$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.
$\vec{\mathbf{u}} = (0,1,1)$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.	$\vec{\mathbf{u}} = (1,1,1)$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

II. Quels sont les axes et angles des rotations de matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB, \qquad AC, \qquad BC,$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

III. Calculer les produits de quaternions suivants. (Garder vos résultats pour l'exercice V.)

$(1+i)(2+3i)$, $(1+j)(2+3j)$, $(i+j)(i+k)$, $(i+k)(i+j)$,
$(i+j)^2$, $(1+i+j)^2$, $(1+i+j)(1-i-j)$, $(1+i+j+k)^2$.

IV. Pour chaque quaternion u qui suit, identifier ses parties réelle et pure, et calculer $\overline{u}$, $\|u\|$, et $u^{-1} = \frac{1}{\|u\|^2}\overline{u}$.

$$k \qquad 1+j \qquad 3i+4k \qquad 1+i+j+k$$

V. Pour chaque produit de quaternions uv de l'exercice III, calculer $\|u\|$, $\|v\|$ et $\|uv\|$, et comparer $\|u\|\|v\|$ et $\|uv\|$.

VI. Soit $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ et $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ des quaternions purs.

(a) Calculer uv.

(b) Quelles sont les parties réelle et pure de uv ?

(c) Si on identifie ces quaternions purs u et v aux vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbf{R}^3$, alors à quoi correspondent-elles ces parties réelle et imaginaire de uv ?

VII. (a) Quels sont les axes et les angles des rotations correspondant aux quaternions de norme 1 suivants ?

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j, \qquad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}k, \qquad u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k,$$

$$v=\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}j, \qquad w=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i-\frac{5}{10}j+\frac{5}{10}k.$$

(b) Quels sont les axes et les angles des rotations correspondant à uv, à $\overline{u}v$ et à vu ?

VIII. Quels sont quaternions de norme 1 correspondant aux rotations d'axe et angle suivantes ?

(a) Axe engendré par $\vec{\mathbf{k}}=(0,0,1)$. Angle $\frac{3\pi}{2}$.

(b) Axe engendré par $(1,0,1)$. Angle π.

(c) Axe engendré par $(1,-1,-1)$. Angle $\frac{4\pi}{3}$.

IX. (a) Quels sont l'axe et l'angle de la rotation obtenue en faisant d'abord la rotation de VIII(a) suivie de la rotation de VIII(b) ?

(b) Même question pour la rotation de VIII(b) suivie de la rotation de VIII(a).