L1 SF 2015 : Option Maths 2 — Feuille n$^{\text{o}}$ 3

I. Montrer par une récurrence simple qu'on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

II. Montrer par une récurrence simple qu'on a

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

III. Considérons la suite d'entiers u_n définie par

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ pour } n \geq 3.$$

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ... , et deviner une formule pour u_n.

(b) Montrer votre formule par une récurrence d'ordre 2.

IV. Les nombres de Fibonacci sont les membres de la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... donnée par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

Montrer par récurrence qu'aucun couple de nombres de Fibonacci consécutifs n'ont un diviseur commun plus grand que 1.

V. Calculer

(a) $d_1 = \text{pgcd}(56, 35)$,

(b) $d_2 = \text{pgcd}(309, 186)$,

(c) $d_3 = \text{pgcd}(1024, 729)$,

(d) $d_4 = \text{pgcd}(12075, 4655)$.

VI. Trouver des entiers x et y tels que

(a) $56x + 35y = d_1$,

(b) $309x + 186y = d_2$,

(c) $1024x + 729y = d_3$,

(d) $12075x + 4655y = d_4$.

VII. (a) Calculer $d_5 = \text{pgcd}(12075, 4655, 56)$.

(b) Trouver des entiers x, y, z tels que $12075x + 4655y + 56z = d_5$.

VIII. Montrer qu'aucune simplification n'est possible dans la fraction

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

si on a $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$.