L3 Alg/Arith 2011 Feuille d'exercices 1

Rappels. *L'*ordre *d'un élément x d'un groupe est* $\mathrm{ordre}(x) = \inf\{n \geq 1 \mid x^n = e\}$.

- *On a* $\mathrm{ordre}(x) = d$ *ssi on a* $x^d = e$ *et aussi* $x^i \neq e$ *pour tout* $1 \leq i \leq d-1$.
- *Quand on a* $\mathrm{ordre}(x) = d$, *alors* $x^n = e \Leftrightarrow n$ *est un multiple de* d.
- *Quand on a* $\mathrm{ordre}(x) = d$, *alors* $\mathrm{ordre}(x^i)$ *divise* d. *La formule précise est* $\mathrm{ordre}(x^i) = \frac{d}{\mathrm{pgcd}(d,i)}$.

I. Quels sont les ordres de $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et de $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$? Quel est l'ordre de AB ?

II. Trouver x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, et y_3 tous d'ordre 4 dans $(\mathbb{Z}/4) \times (\mathbb{Z}/4)$ tels que

$$\mathrm{ordre}(x_1 + y_1) = 1, \qquad \mathrm{ordre}(x_2 + y_2) = 2, \qquad \mathrm{ordre}(x_3 + y_3) = 4.$$

III. Décrire tous les sous-groupes de S_3.

IV. Soit G un groupe et $a, b \in G$. Montrer que l'équation $xax = b$ a une solution $x \in G$ si et seulement si ab est un carré, i.e. $\exists c \in G$, $ab = c^2$.
Cette solution est-elle unique ?

V. (a) Résoudre l'équation $x^2 = I$ dans S_3 puis dans S_4.

(b) Dans S_n (avec $n \geq 3$) on dénote $(1\,2)$ la permutation échangeant $1 \leftrightarrow 2$ et fixant les autres chiffres, et on dénote $(1\,2\,3)$ la permutation envoyant $1 \to 2 \to 3 \to 1$ et fixant $4, \ldots, n$.
Peut-on résoudre dans S_n l'équation $x^2 = (1\,2)$? l'équation $x^2 = (1\,2\,3)$?

VI. Soit G un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est abélien.

VII. Soit H un sous-ensemble d'un groupe G.

(a) Montrer que H est un sous-groupe si et seulement si $H \neq \varnothing$ et $\forall\, x, y \in H$ on a $xy^{-1} \in H$.

(b) Maintenant supposons que G est **fini**. Montrer que H est un sous-groupe si et seulement si $H \neq \varnothing$ et $\forall\, x, y \in H$ on a $xy \in H$. (Indication : Déduire de l'existence de répétitions dans la suite infinie $x, x^2, x^3, \ldots$ qu'il existe $m, n \geq 1$ tels que $x^m = e$ et $x^n = x^{-1}$.)

VIII. (a) Pour montrer que $\mathrm{ordre}(x) = 16$, pourquoi suffit-il de montrer que $x^{16} = e$ et que $x^8 \neq e$?

(b) Pour montrer que $\mathrm{ordre}(g) = N$, pourquoi suffit-il de montrer que $g^N = e$ et que $g^{N/p_i} \neq e$ pour tout premier p_i divisant N ?

(c) Pour voir si $\mathrm{ordre}(y) = 24$, que faut-il contrôler ?

IX. (a) Si $x \in G$ et $y \in G$ sont d'ordre fini, alors $xy \in G$ est d'ordre fini. Vrai ou faux ?

(b) Si G est abélien, et si $x \in G$ et $y \in G$ sont d'ordre fini, alors $xy \in G$ est d'ordre fini. Vrai ou faux ?

(c) Si un groupe G a tous ses sous-groupes stricts $H \subsetneq G$ abéliens, alors G est lui-même abélien. Vrai ou faux ?

X. (a) Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$? Y en a-t-il un qui n'est pas de la forme $N_1 \times N_2$?

(b) Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$?