L3 Alg/Arith 2011 — Feuille d'exercices 2

I. (a) Est-ce que le sous-ensemble $H := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\} \subset S_n$ est un sous-groupe de S_n ? Un sous-groupe distingué ? Est-ce que H est isomorphe à un groupe que nous connaissons ? Que vaut $[S_n : H]$?

(b) Pour $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ montrer qu'on a $\tau_1 H = \tau_2 H$ si et seulement si on a $\tau_1(1) = \tau_2(1)$.
En redéduire la valeur de $[S_n : H]$.

II. Parmi les sous-groupes suivants de $GL_2(\mathbb{R})$, lesquels sont distingués ?

$$\begin{aligned}
T_2(\mathbb{R}) &:= \{\text{matrices triangulaires inversibles } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\}\,,\\
\mathrm{Diag}_2(\mathbb{R}) &:= \{\text{matrices diagonales inversibles } \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\}\,,\\
\mathrm{Scal}_2(\mathbb{R}) &:= \{\text{matrices scalaires inversibles } \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) = aI\}\,,\\
SL_2(\mathbb{R}) &:= \{\text{matrices de déterminant } 1\}\,.
\end{aligned}$$

III. Soit H un sous-groupe de G. Trouver un x et un y dans G avec $H = xH$ et $H = Hy$.

Conclusion : une des classes à gauche (et à droite) de H dans G est H lui-même.

IV. Soit G un groupe, et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

V. Considérons le groupe G suivant et ses sous-groupes H et N :

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\},\\
H &= \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathbb{R},\ t > 0 \right\},\\
K &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

En identifiant $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ avec le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous pouvons dessiner des sous-ensembles de G. (Le groupe G s'identifie au demi-plan ouvert où $x > 0$.)

(a) Dessiner les classes à gauche et les classes à droite de H.

(b) Le sous-groupe H est-il distingué ?

(c) Dessiner les classes à gauche et les classes à droite de K.

(d) Le sous-groupe K est-il distingué ?

VI. Montrer que l'application $(\mathbb{R}, +) \to \mathbb{C}^\times : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme de groupes. Quel est son image et son noyau ?

VII. Même pour $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times : z \mapsto |z|$.

VIII. (a) Soit $\phi\colon G \to H$ un morphisme non trivial de groupes (c'est-à-dire $\ker\phi \neq G$) avec $|G| = 18$ et $|H| = 15$.
Quel est l'ordre $|\operatorname{im}\phi|$?

(b) Donner un exemple d'un tel morphisme.

IX. Soit $H = \{1, -1, i, -i\}$ vu comme sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$.

(a) Décrire les classes de H dans $\mathbb{C}^\times$ sous la forme $\{\ldots, \ldots, \ldots\}$

(b) Expliciter un isomorphisme entre $\mathbb{C}^\times/H$ et $\mathbb{C}^\times$.

X. (a) Soit $n \geq 1$ un entier. Quels sont les éléments d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$? Dans $\mathbb{Z}$?

(b) Déterminer tous les morphismes de groupes $\rho : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

XI. (a) Soient $N_1 \subset G_1$ et $N_2 \subset G_2$ des sous-groupes distingués. Alors $N_1 \times N_2$ est-il un sous-groupe distingué de $G_1 \times G_2$?

(b) Montrer que $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2)$ est isomorphe à $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

XII. Soit $B \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe de matrices inversibles de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, et soit $U \subset B$ le sous-groupe de matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Montrer que $U \cong (\mathbb{R}, +)$.

(b) Montrer que U est un sous-groupe distingué de B.

(c) Montrer que B/U est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

XIII. (a) Montrer qu'un morphisme de groupes $\psi : H \to \Gamma$ est injectif si et seulement si $\ker\psi = \{e\}$.

(b) Soient $H, N \subset G$ des sous-groupes avec N distingué. Quel est le noyau du morphisme $\phi : H \to G/N$ qui est le composé

$$H \xrightarrow[\subset]{\text{inclusion}} G \xrightarrow{\text{surjection canonique}} G/N\,?$$

(c) Soit $V := \{I, (1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,3)(2\,4)\}$ le sous-groupe distingué d'ordre 4 de S_4. Montrer qu'il existe un isomorphisme $S_3 \cong S_4/V$.

XIV. Le *commutateur* de deux membres x, y d'un groupe G est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

(a) Montrer qu'on an $[x, y] = e$ si et seulement si x et y commutent.

(b) Montrer qu'on a $[x^{-1}, y^{-1}] = [x, y]^{-1}$.

(c) Montrer qu'on a $g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$.

(d) Soit $[G, G] \subset G$ le sous-ensemble de tous les produits de commutateurs, i.e. d'éléments de la forme $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]$ avec $n \geq 0$. Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe distingué de G.

(e) Montrer que $G/[G, G]$ est abélien.

(f) Soit $N \subset G$ un sous-groupe distingué. Montrer que G/N est abélien si et seulement si $[G, G] \subset N$.