I. Soit $(M, +, 0)$ un groupe abélien. La *torsion* de M est

$$\mathrm{Tors}(M) = \{x \in M \mid \exists\, n \geq 1 \text{ avec } nx = 0\}.$$

(a) Montrer que $\mathrm{Tors}(M) \subset M$ est un sous-groupe.

(b) Soit $N = M/\mathrm{Tors}(M)$. Montrer que $\mathrm{Tors}(N) = \{\overline{0}\}$.

(c) Donner un exemple d'un groupe **nonabélien** G pour lequel le sous-ensemble $\{x \in G \mid \exists\, n \geq 1 \text{ avec } x^n = e\} \subset G$ n'est pas un sous-groupe.

II. Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

III. Le *centre* d'un groupe G est

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \text{ pour tout } g \in G\}.$$

(a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

(b) Déterminer le centre du groupe symétrique S_3 et de S_n pour $n \geq 3$.

(c) Déterminer le centre de $GL_2(\mathbb{R})$. (Indication : Quelles sont les matrices inversibles qui commutent avec $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?)

IV. On examine trois groupes abéliens d'ordre 64 avec des diviseurs élémentaires différents pour vérifier qu'ils ne sont pas isomorphes.

(a) Dans $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ combien y a-t-il d'éléments x vérifiant $x = 0$? Combien vérifient $2x = 0$? $4x = 0$? $8x = 0$? $16x = 0$?
Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 1 ? 2 ? 4 ? 8 ? 16 ?

(b) Mêmes questions pour le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(c) Mêmes questions pour le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

V. Déterminer les diviseurs élémentaires et facteurs invariants des groupes abéliens suivants :

$$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/105Z),$$
$$(\mathbb{Z}/2!\,\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3!\,\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/7!\,\mathbb{Z}).$$

VI. Lesquels des groupes suivants d'ordre 360 sont isomorphes ?

$$G_1 = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}), \qquad G_2 = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}),$$
$$G_3 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}), \qquad G_4 = (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}),$$
$$G_5 = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}), \qquad G_6 = \mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$$

VII. Soit $a = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r}$ et $b = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ avec les p_i des premiers distincts. Quels sont les diviseurs élémentaires et facteurs invariants de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$?

VIII. Déterminer toutes les partitions de 5 et de 6. Déterminer $\pi(5)$ et $\pi(6)$.

IX. (a) Déterminer les classes d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre 32. *Idem* pour l'ordre 81, l'ordre 18 et l'ordre 180.

(b) Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre 1800 ?

X. (a) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un K-espace vectoriel. Soit $v_1, \ldots, v_r$ une base de F, et soit $w_1, \ldots, w_s \in E$.

Montrer que $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ est une base de E si et seulement si $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_s}$ est une base de E/F.

(b) En déduire $\dim E = \dim F + \dim E/F$.

(c) Soit $\phi \colon E \to E$ un endomorphisme avec $\phi(F) \subset F$. Montrer que ϕ induit un endomorphisme $\overline{\phi} \colon E/F \to E/F$ avec $\overline{\phi}(\overline{v}) = \overline{\phi(v)}$ pour tout $v \in E$.

(d) Soit A la matrice de $\phi|_F \colon F \to F$ dans la base $v_1, \ldots, v_r$ de F, et soit C la matrice de $\overline{\phi} \colon E/F \to E/F$ dans une base $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_s}$ de E/F.

Montrer que la matrice de ϕ dans la base $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ de E est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

XI. Soit $F \subset E$ et $V \subset U$ des sous-espaces vectoriels. Soit $\phi \colon E \to U$ une application linéaire avec $\phi(F) \subset V$. Montrer que si ϕ induit des isomorphismes d'espaces vectoriels $\phi|_F \colon F \xrightarrow{\cong} V$ et $\overline{\phi} \colon E/F \xrightarrow{\cong} U/V$, alors ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

XII. Soit $\psi \colon E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.

(a) Supposons $\dim E = 6$, $\dim F = 4$, et $\dim \ker \psi = 3$. Quelle est $\dim \operatorname{coker} \psi$?

(b) Supposons $\dim E = e$, $\dim F = f$, et $\dim \ker \psi = k$. Quelle est $\dim \operatorname{coker} \psi$?

XIII. Considérons l'espace vectoriel réel

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f \text{ est périodique de période } 2\pi\}.$$

Pour $f \in V$ notons $Df = f'$ sa dérivée. Alors $D \colon V \to V$ est une application linéaire.

(a) Soit $f \in V$ et soit F sa primitive donnée par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Sous quelles conditions F est-elle périodique ?

(On admet que l'intégrale de f sur tout intervalle $[y, y + 2\pi]$ de longueur 2π a la même valeur.)

(b) Identifier l'image de $D \colon V \to V$ au noyau d'une application linéaire de V vers un espace vectoriel que vous spécifierez.

(c) Quelle est la dimension de $\operatorname{coker} D$?