I. Soit A un anneau intègre de cardinal fini. Montrer que A est un corps.
(*On pourra étudier la bijectivité de la multiplication par un élément.*)

II. On travaille dans un anneau commutatif A. Un élément $u \in A$ est dit **nilpotent** s'il existe un $n \geq 1$ avec $u^n = 0$.

(a) Quels sont les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$? De $\frac{\mathbb{R}[x]}{x^2(x-1)^3\mathbb{R}[x]}$?

(b) Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ?

(c) Soit $u \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1 - u$ est inversible en explicitant son inverse. Utiliser la même formule pour déduire l'inverse de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit $a, b \in A$. Trouver $x, y \in A$ avec $(a + b)^4 = a^3x + b^2y$.

(e) Soit $a, b \in A$ et soit m, n des entiers strictement positifs. Trouver $x, y \in A$ avec $(a + b)^{m+n-1} = a^m x + b^n y$.

(f) En déduire que

$$\operatorname{nil} A = \{u \in A \mid u \text{ est nilpotent}\}$$

est un idéal de A.

(g) Soit $I \subset A$ un idéal. Son **radical** est l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{u \in A \mid \text{il existe } n \geq 1 \text{ tel que } u^n \in I\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
Préciser la relation qui existe entre $\sqrt{I}$ et les nilpotents de A/I.

(h) Dans l'anneau $\mathbb{Z}$ quels sont les radicaux des idéaux $8\mathbb{Z}$ et $72\mathbb{Z}$?
Dans l'anneau $\mathbb{R}[x]$ quel est le radical de l'idéal $x^2(x - 1)^3\mathbb{R}[x]$?

(i) Pour tout entier $N \geq 2$ décrire le radical de l'idéal $N\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.
Essayer d'énoncer une généralisation de ce résultat aux idéaux principaux d'un anneau factoriel.

(j) Démontrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ on a $\operatorname{nil} A \subset \mathfrak{p}$.
(*Pour $u \in A$ nilpotent, la réponse à* (b) *donne des informations sur son image* $\overline{u} \in A/\mathfrak{p}$.)

III. (a) Soit A un anneau commutatif dans lequel $2 = 0$, c'est à dire $1 + 1 = 0$. Montrer que pour tout $a, b \in A$ on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

(b) Soit A un anneau commutatif dans lequel $5 = 0$, c'est à dire $1+1+1+1+1 = 0$. Montrer que pour tout $a, b \in A$ on a $(a + b)^5 = a^5 + b^5$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier, et soit A un anneau commutatif dans lequel $p = 0$ (dans le sens ci-dessus).
Montrer que l'application $F \colon A \to A$ envoyant $a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneaux.

(d) On écrit $F^2 = F \circ F$ et $F^3 = F \circ F \circ F$, etc.
Calculer $F^2(a)$ et $F^3(a)$. Que vaut $F^m(a)$ pour $m \geq 1$?

(e) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que F soit injective qui ne mentionne pas explicitement le nombre p.
(*Remarquer que F est injective si et seulement si toutes les F^m sont injectives.*)

IV. Un élément $e \in A$ est appelé un **idempotent** s'il vérifie $e^2 = e$.

(a) Quels sont les idempotents dans un corps ? Dans un anneau intègre ?

(b) Quels sont les idempotents dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

(c) Quels sont les idempotents de $\mathbb{Z}/119\mathbb{Z}$ qui correspondent sous l'isomorphisme du théorème chinois aux idempotents $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

(d) Montrer que si e est un idempotent, alors $1 - e$ est aussi un idempotent.

(e) Soit $e \in A$ un idempotent, et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. Montrer qu'on a soit $eA \subset \mathfrak{p}$ soit $(1 - e)A \subset \mathfrak{p}$.
(*La réponse à* (a) *donne des informations sur l'image* $\overline{e} \in A/\mathfrak{p}$.)