L3 Maths Alg/Arith 2011 Feuille d'exercices 6

I. Soit F un corps, $f(x) \in F[x]$ et $a, b \in F$. Il existe des polynômes uniques $q(x), r(x) \in F[x]$ avec $f(x) = (x-a)(x-b)q(x) + r(x)$ et $\deg r(x) \leq 1$.

(a) En supposant $a \neq b$, expliciter $r(x)$ en fonction de $f(a)$ et $f(b)$.

(b) En supposant $a = b$, expliciter $r(x)$ en fonction de $f(a)$ et $f'(a)$.

II. Le polynôme $x^4 + 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[x]$?

III. Lesquels des polynômes suivants ont des racines dans $\mathbb{Q}$? Lesquels sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$?

$$\begin{array}{ccc} x^3+2x+4, & x^3-2x-4, & x^4+2x+2, \\ x^4+x^3+x^2+x+1, & x^4+x^2+1, & 2x^{10}+3x+21, \\ x^4+4 & x^6+x^3+1. & \end{array}$$

IV. Pour chacun des polynômes $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ suivants, calculer $\mathrm{pgcd}(f(x), f'(x))$:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \qquad \text{et} \qquad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

Lesquels de ces polynômes ont une racine multiple dans une extension de $\mathbb{Q}$?

V. Soit $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps à deux éléments 0 et 1.

(a) Le polynôme $x^3 + x + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$?

(b) Quel est le cardinal de l'anneau quotient $\mathbb{F} = \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x^3+x+1)\mathbb{F}_2[x]}$? Quel est le cardinal de son groupe multiplicatif $\mathbb{F}^\times$?

(c) Trouver un générateur de $\mathbb{F}^\times$ et calculer ses puissances.

(d) Expliciter l'inverse de tout élément de $\mathbb{F}^\times$.

VI. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré ≤ 4 sur $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

VII. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que s'il y a un premier p tel que $\overline{f}(x)$ soit irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$. Utiliser cette méthode pour montrer que $x^4 + 3x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

VIII. Soit $n \geq 1$ un entier naturel, et p un nombre premier.

(a) Le polynôme $x^n - 1$ a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

(b) Soit K un corps de caractéristique. Noter que $A = K[x]$ vérifie l'hypothèse de l'exercice III(c) de la feuille 5.
Le polynôme $x^p - 1$ a-t-il une racine multiple dans K ? Laquelle ?

(c) Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique non précisée. Soit $f_n(x) = x^n - 1 \in F[x]$. Calculer $\mathrm{pgcd}(f_n(x), f_n'(x))$ dans $F[x]$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de $x^n - 1$ dans F soient simples.