I. Montrer que $p(x) = x^3 + 9x + 6$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$. Soit θ une racine de $p(x)$. Ecrire $\dfrac{1}{1+\theta} \in \mathbb{Q}(\theta)$ sous la forme $a + b\theta + c\theta^2$.
(*Indication : Les inconnus a, b, c sont les solutions d'un systéme linéaire sur $\mathbb{Q}$ qu'on déduit des équations* $(1+\theta)(a + b\theta + c\theta^2) = 1$ *et* $\theta^3 + 9\theta + 6 = 0$.)

II. Monter que $x^3 - 2x - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, et soit ω une de ses racines. Calculer $(1+\omega)(1+\omega+\omega^2)$ et $\dfrac{1+\omega}{1+\omega+\omega^2}$.

III. Soit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Considérons l'application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \\ & r & \mapsto & r(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \end{array}$$

(a) Quelle est la matrice M de μ dans la base $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$?

(b) De quelle application $\mathbb{Q}$-linéaire M^{-1} est-elle la matrice dans la base $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$?

(c) En déduire l'écriture de $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^{-1}$ en termes de la base $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$.

IV. On note $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Soit T un indéterminé.
Quels sont les degrés des extensions suivantes ?

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] & [\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}) : \mathbb{Q}] & [\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] \\ [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] & [\mathbb{C} : \mathbb{R}] & [\mathbb{Q}(T) : \mathbb{Q}] \end{array}$$

V. Montrer que si $[F(\alpha) : F]$ est pair, alors $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

VI. Soit F un corps de caractéristique $\neq 2$, et $d, e \in F$ tels que d, e et de ne sont pas des carrés de membres de F. Quel est $[F(\sqrt{d}, \sqrt{e}) : F]$?

VII. Supposons $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ avec tous les α_i^2 dans $\mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin K$.

VIII. (a) Trouver le polynôme minimal $p(x)$ de ζ_7 sur $\mathbb{Q}$.
Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?
Sont-elles dans $\mathbb{Q}(\zeta_7)$?
Quel est le corps de décomposition de $p(x)$ sur $\mathbb{Q}$?

(b) Trouver le polynôme minimal $q(x)$ de $\zeta_7 + \zeta_7^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ sur $\mathbb{Q}$?
Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?
L'inclusion $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_7) \cap \mathbb{R}$ est-elle stricte ?
Les autres racines de $q(x)$ sont-elles dans $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$?
Quel est le corps de décomposition de $q(x)$ sur $\mathbb{Q}$?

IX. Les inclusions suivantes sont-elles strictes ?

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$
$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$?

X. (a) Les inclusions $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ sont-elles strictes ? Quel est $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i) : \mathbb{Q}]$? Donner une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$.

(b) Soit $v = i\sqrt[3]{2}$. L'inclusion $\mathbb{Q}(v) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ est-elle stricte ? Quel est $[\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]$? Quel est le polynôme minimal de v sur $\mathbb{Q}$?

(c) Soit $u = i + \sqrt[3]{2}$. Montrer que $1, u, u^2, u^3$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre. En déduire que $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] \geq 4$.

(d) L'inclusion $\mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ est-elle stricte ? Quel est le degré du polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}$?

XI. (a) Quel est le corps de décomposition de $X^4 + 1$ sur $\mathbb{Q}$, et quel est son son degré sur $\mathbb{Q}$?

(b) *Idem* pour $X^4 - 2$.

(c) *Idem* pour $X^4 + 2$.

(d) *Idem* pour $X^4 + X^2 + 1$.

(e) *Idem* pour $X^6 - 4$.

XII. Ecrire $x^2 + y^2$ et $x^4 + y^4$ comme des polynômes en les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1 = x + y$ et $\sigma_2 = xy$.

XIII. Ecrire $p(x, y, z) = x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2$ comme un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$ et $\sigma_3 = xyz$. *Idem* pour $q(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$.

XIV. Soit r_1, r_2 les racines du polynôme $T^2 - 2T + 3$.

(a) Quel est le polynôme unitaire de degré 2 dont les racines sont r_1^3 et r_2^3 ?

(b) *Idem* pour r_1^4 et r_2^4.

(c) Quelle est la valeur de $(r_1 - r_2)^2$?

XV. Soit s_1, s_2, s_3 les racines de $P(T) = T^3 + 2T^2 + 3T + 5$.

(a) Quel est le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont $\frac{1}{s_1}$, $\frac{1}{s_2}$ et $\frac{1}{s_3}$?

(b) *Idem* pour $s_1 + s_2$, $s_1 + s_3$ et $s_2 + s_3$.

(c) *Idem* pour $\frac{s_1}{s_2+s_3}$, $\frac{s_2}{s_1+s_3}$ et $\frac{s_3}{s_1+s_2}$.