Résumé de la séance du 20 janvier 2010

J. YAMEOGO

# Chapitre 1
# Formule de Taylor, développements limités

## 1.1 Formule de Taylor en une variable réelle

Etant donnés un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$ on essaie, quand c'est possible, de ramener l'étude de $f$ au voisinage de $x_0$, à celle d'un polynôme dépendant de $x_0$ et de $f$.

**Définition 1.1. (rappel)** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $n$ un entier naturel. On dit qu'une application non nulle $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré $n$ s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout $x \in I$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.*

**Exemple 1.2.** Les applications suivantes sont polynomiales:

1. $f: [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + 2x^3 - x^5$ est polynomiale de degré 5. On écrit usuellement $\deg(f) = 5$.
2. $h: [0, +\infty[$ définie par $h(x) = 7$ est une fonction constante non nulle, donc polynomiale de degré 0. Pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, la fonction identiquement nulle sur $I$ est aussi une fonction polynomiale. Le polynôme nul n'a pas de degré, ou si l'on veut, il a n'importe quel degré. Néanmoins, il arrive que par convention, on lui attribue le degré $-\infty$ $(\deg(0) = -\infty)$, ce qui est commode pour étendre les propriétés de *degré d'une somme* et *degré d'un produit* de polynômes.

**Exemple 1.3. (approximation affine)**
Soit $f: [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \sqrt{x}$. Considérons $f$ au voisinage de $x_0 = 1$. Donner une approximation affine de $f$ en $x_0$ c'est donner une fonction affine (polynomiale de degré au plus 1) $P$ définie par $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ telle que la différence $(f(x) - P(x))$ soit négligeable par rapport à $(x - x_0)$. Plus précisément on veut écrire $f(x) = P(x) + (x - x_0) \times \varepsilon(x - x_0)$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.
La fonction $f$ ici étant dérivable en $x_0$, de l'écriture
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0) \times \varepsilon(x - x_0)$ on déduit tout de suite:

$a_0 = f(x_0)$, $a_1 = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ (par définition de la dérivée en $x_0$).

L'approximation affine de $f$ en $x_0$ est donc la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Ici nous avons $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, valable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.
On en déduit que l'écriture souhaitée est $\sqrt{x} = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) + (x - 1) \times \varepsilon(x - 1)$. Géométriquement, cela signifie que l'on approxime le graphe de $f$ par sa tangente en le point $(x_0, f(x_0))$. Ainsi, si $x = 1 + \delta$, avec $\delta$ assez petit (par exemple $\delta = 0.1$), alors $\sqrt{1.1}$ est approximée au premier ordre par $1 + \frac{0.1}{2} = 1.05$.

Les formules de Taylor vont nous permettre, pour des fonctions suffisamment dérivables, de faire des approximations d'ordre 2 (quadratiques) ou plus fines d'ordre plus élevé au voisinage d'un point $x_0$.

**Définition 1.4.** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour un entier naturel $n$ donné, on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ si $f$ et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n$ existent et sont continues sur $I$. Lorsque $n = 0$, dire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I$ signifie tout simplement que $f$ est continue sur $I$.*

**Théorème 1.5. (Taylor-Lagrange)** *Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ un intervalle, $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in ]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.$$

*Cette formule est appelée formule de Taylor avec reste sous la forme de Lagrange ou formule de Taylor-Lagrange. Le reste étant l'expression $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$.*

*Dans le cas où $a = 0$ cette formule est dite de Mac-Laurin.*

**Remarque 1.6.** Pour $n=0$, la formule du théorème 1.5 ci-dessus s'écrit $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$. C'est la formule dite des accroissements finis. *Le théorème des accroissements finis dit que si f est continue sur* $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors le graphe de $f$ admet en un certain point $(c, f(c))$ ($c\in]a,b[$), une tangente parallèle à la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

**Exemple 1.7.** La fonction $f\colon[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. On a $f(-1)=f(1)$, donc il existe $c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$ ($c=0$).

**Remarque 1.8.** Dans le théorème 1.5, on peut échanger les rôles de $a$ et $b$ dans la formule et avoir

$$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n+\tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}.$$

Pour s'en convaincre, remplacer dans la formule du théorème, $f$ par $g=f\circ\varphi$ où $\varphi\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x)=a+b-x$; on a $g^{(i)}=(f^{(i)}\circ\varphi)\times(-1)^i$.

Ainsi, si $f$ est une fonction réelle $(n+1)$ fois dérivable au voisinage de 0, en posant $a=0$ et $b=x$ ($x>0$ ou $x<0$), on a $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, avec $|c|<|x|$.