Résumé de la séance du 3 février 2010

J. YAMEOGO

1.3 Quelques techniques de calcul des DL

Notation 1.21. *Soit f une fonction réelle admettant un développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$, de partie régulière P_n.*

1. *On peut utiliser l'une ou l'autre des écritures suivantes pour exprimer le DL de f à l'ordre n en x_0:*

   a) $f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

   b) $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$

2. *Si le quotient* $\dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$ *est borné au voisinage de x_0, alors on peut écrire* $f(x) = P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1})$ *pour exprimer le DL de f à l'ordre n en x_0.*

Théorème 1.22. ("troncation") *Soient m et n deux entiers naturels tels que $n < m$, f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un développement limité d'ordre m en x_0 donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_m(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m),$$

alors par troncation, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 donné par $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$.

Théorème 1.23. (DL d'une combinaison linéaire) *Soient f et g deux fonctions réelles admettant chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ admet un développement limité d'ordre n en x_0.*
Plus précisément, si P_n et Q_n sont des polynômes de degré au plus n tels que $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ *et* $g(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n)$, *alors on a*

$$(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha P_n + \beta Q_n)(x) + o((x - x_0)^n).$$

Proposition 1.24. (Conséquence du théorème d'unicité du DL)
Soit f une fonction réelle définie au voisinage de 0 et admettant un développement limité d'ordre n donné par $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ $(\deg(P_n) \leqslant n)$.

1. *Si f est une fonction paire, alors dans les termes non nuls du polynôme P_n, il n'apparaît que des puissances paires.*

2. *Si f est une fonction impaire, alors dans les termes non nuls du polynôme P_n, il n'apparaît que des puissances impaires.*

Note 1.25. (DL de fonctions usuelles à retenir absolument) Les formules ci-dessous concernent des développements limités de fonction usuelles en 0. Ces formules sont obtenues par application du théorème de Taylor-Young en le point $x_0 = 0$.

1. $\boldsymbol{e^x = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} x^i + o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

2. $\boldsymbol{\dfrac{1}{1 - x} = \sum\limits_{i=0}^{i=n} x^i + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$

3. $\boldsymbol{\dfrac{1}{1 + x} = \sum\limits_{i=0}^{i=n} (-1)^i x^i + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$

4. $\boldsymbol{(1 + x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - i + 1)}{i!} x^i + o(x^n)}$ formule qui s'écrit encore
   $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$.

5. $\boldsymbol{\ln(1 - x) = -\left(\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i} x^i\right) + o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $\ln(1 - x) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \cdots - \dfrac{1}{n}x^n + o(x^n)$

6. $\boldsymbol{\ln(1 + x) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $\ln(1 + x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

7. Développement limité de $\sin(x)$ en 0, à l'ordre $\boldsymbol{n}$ (valable pour $n=2p+1$ ou $n=2p+2$):
   $\boldsymbol{\sin(x) = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2p+2})}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$.
8. Développement limité de $\cos(x)$ en 0, à l'ordre $\boldsymbol{n}$ (valable pour $n=2p$ ou $n=2p+1$):
   $\boldsymbol{\cos(x) = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} + o(x^{2p+1})}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $\cos = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p+1})$

Théorème 1.26. (DL d'un produit) *Soient f et g deux fonctions réelles, admettant au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, un développement limité à l'ordre n en x_0. Alors la fonction produit $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. La partie régulière du développement limité de $f \times g$ s'obtient en tronquant à l'ordre n, le produit des parties régulières de f et g.*

Si $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n)$, alors $(f \times g)(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ où $T_n(x)$ est le produit $P_n(x) \times Q_n(x)$ amputé de ses termes de degrés strictement plus grands que n.

Exercice 1.1. Calculer le developpement linité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ de la fonction h définie par $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} \times \ln(1+x)$.

Solution: On pose $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = \ln(1+x)$ et on utilise les DL des fonctions usuelles.
On trouve $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$, $g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
En appliquant le théorème précédent on obtient $h(x) = x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$.

Théorème 1.27. (DL d'une composée) *Soient f une fonction réelle définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et g une fonction réelle définie au voisinage de $f(x_0)$ et n un entier naturel. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 et g admet un développement limité à l'ordre n en $f(x_0)$, alors la composée $h = g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. Plus précisément, si P_n (resp. Q_n) est la partie régulière du développement limité à l'ordre n de f (resp. g) en x_0 (resp. $f(x_0)$) alors la partie régulière T_n de $h = g \circ f$ s'obtient en tronquant à l'ordre n, la composée $Q_n \circ P_n$.*

Exemple 1.28. ($f(x_0) \neq 0$, DL de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0) Soit f une fonction réelle définie au voisinage de x_0 telle que $f(x_0) \neq 0$ et admettant un développement limité d'ordre n en x_0. Alors $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. Plus précisément, le développement limité de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0 peut s'obtenir en procédant comme suit:

1. Note: quitte à remplacer f par $\frac{1}{f(x_0)} \times f$, on peut supposer que $f(x_0) = 1$.
2. Supposons donc $f(x_0) = 1$ et posons $\boldsymbol{u(x) = 1 - f(x)}$. La fonction u est définie au voisinage de x_0 et on a $u(x_0) = 0$.
3. On considère $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{1-x}}$. g est définie au voisinage de $0 = u(x_0)$.
4. Nous avons $\boldsymbol{h(x) = (g \circ u)(x)}$. Si nous disposons du DL de f, alors nous en déduisons celui de u. Le DL de g en 0 est fournie par les formules des fonctions usuelles. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1.27 pour obtenir le DL de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0 en utilisant le DL de f en x_0.