Résumé de la séance du 3 mars 2010

J. YAMEOGO

2.4.3 Changement de variable

La technique du changement de variable se fonde sur la règle de dérivation d'une fonction composée.

Théorème 2.21. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables et que l'image de J par φ est contenue dans I (ce qui s'écrit: $\varphi(J) \subset I$).*

Alors la fonction composée $h \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a $\boxed{(h \circ \varphi)' = (h' \circ \varphi) \times \varphi'}$.

Théorème 2.22. *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, $\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\varphi(J) = I$. Alors on a:*

1. *Si F est une primitive de f, alors $F(\varphi(t))$ est une primitive de $f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Réciproquement, toute primitive de $f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$ est de la forme $F \circ \varphi$ où F est une primitive de f.*
2. *Si a et b sont deux points de I et α et β sont deux points de J tels que*
$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b \text{ et } \varphi([\alpha, \beta]) = [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.23. Calculer l'intégrale suivante: $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$.

Solution: Soit $\varphi: [1, 4] \longrightarrow \left[0, \frac{3}{2}\right]$ définie par $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$. On a $\varphi'(t) = \frac{1}{2}$; φ est strictement croissante et $\varphi([1,4]) = \left[0, \frac{3}{2}\right]$. En utilisant le théorème précédent, on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Dans la pratique on procède quasi mécaniquement comme suit:
on fait un changement de variable en posant $\boldsymbol{2x+1=u}$, ce qui donne par différentiation membre à membre, $\mathbf{2dx = du}$, donc $\mathbf{dx} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\mathbf{du}$. Lorsque $x = 0$, on a $u = 1$ et lorsque $x = \frac{3}{2}$, on a $u = 4$. On en déduit: $\displaystyle\boldsymbol{\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{d}u}$. Une primitive de la fonction usuelle $u \mapsto \sqrt{u}$ est $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$, ce qui donne $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$. Une simple évaluation de $u \mapsto u^{\frac{3}{2}}$ en 4 et 1 nous donne ensuite $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{7}{3}$. Conclusion: $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$.

Exemple 2.24. Calculer une primitive de la fonction $f: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$.
Solution: on fait un changement de variable en posant $u = 2x^2 + 1$, ce qui donne $\mathrm{d}u = 4x\mathrm{d}x$. On en déduit $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u$. Comme $\displaystyle\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + \text{cste}$, une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ est $\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)$.

D'une manière générale, lorsque la fonction f à intégrer est de la forme $\boldsymbol{f(x) = k\frac{g'(x)}{g(x)}}$ où k est une constante réelle non nulle, on a $\displaystyle\boldsymbol{\int f(x)\mathrm{d}x = k\ln(|g(x)|) + \lambda}$, où λ est une constante réelle arbitraire.

A noter: étant donnée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à calculer (on suppose f continue), quand on pose $x = \varphi(t)$, il faut déterminer l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (attention: il peut arriver que $\alpha > \beta$) tel que:

- φ est continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$
- $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$
- $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$

Dans ces conditions, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\mathrm{d}t$

Exemple 2.25. Soit a un nombre réel strictement positif. En faisant le changement de variable $u = -x$ sur l'intervalle $[-a, 0]$, on obtient:

1. Soit f une fonction continue et **paire** définie sur l'intervalle $[-a, a]$.
   Alors on a $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. **Par exemple,** $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2}$
2. Si f est une fonction continue et impaire définie sur l'intervalle $[-a, a]$, alors on a $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. **Par exemple,** $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = 0,\ \int_{-2}^{2} x^{2009}(\sin(x))^{2010}\mathrm{d}x = 0.}$

Proposition 2.26. *Soit* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et périodique de période* T.

Alors pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, *on a* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{dx}$.

Démonstration. En faisant le changement de variable $u = x + T$, on a $\mathrm{du} = \mathrm{dx}$.
Ce qui donne $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{a+T}^{b+T} f(u-T)\mathrm{du}$.
f étant périodique de période T, on a $f(u-T) = f((u-T)+T) = f(u)$, d'où finalement
$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{a+T}^{b+T} f(u)\mathrm{du}$. □

Corollaire 2.27. *Soit* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et périodique de période* T.

Alors pour tout x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, *on a* $\displaystyle\int_{x_1}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx} = \int_{x_2}^{x_2+T} f(x)\mathrm{dx}$.