Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2005/2006

2ème SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

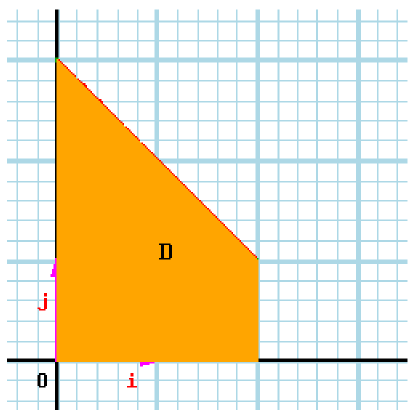
Énoncé et Corrigé de l'Épreuve Écrite de Mathématiques du 12/06/06 (durée: 2 heures)

Exercice 1. (`3 points`)
Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Sur l'intervalle $[0,2]$, on considère la fonction f définie par $f(x) = -x+3$.
Dessiner le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$ et calculer son aire $\mathcal{A}$.

b) Soit $g\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{3}{x+1}$.
Comparer $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$ et l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D.
(Si besoin, on pourra utiliser l'inégalité $1 < \ln(3) < \frac{6}{5}$)

Solution: D est le trapèze dont les sommets sont $\{(0,0), (0,3), (2,1), (2,0)\}$.



Son aire $\mathcal{A}$ se calcule facilement: $\boldsymbol{\mathcal{A} = 4}$. On remarque que $g(0) = f(0) = 3$ et $g(2) = f(2) = 1$. Le graphe de f sur $[0,2]$ est le segment de droite joignant $(0,3)$ et $(2,1)$. La dérivée seconde de g $\left(g''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}\right)$ étant strictement positive sur l'intervalle $[0,2]$, on en déduit que g est convexe sur $[0,2]$, donc $g \leqslant f$ sur l'intervalle $[0,2]$. Conclusion: on a $\displaystyle\boldsymbol{\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x \leqslant 4}$.

Remarque: un calcul direct donne $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 3\Big[\ln(x+1)\Big]_0^2 = 3\ln(3)$.
En utilisant l'inégalité $\ln(3) < \frac{6}{5}$, on en déduit $3\ln(3) < \frac{18}{5} < 4$.

Exercice 2. (3 points)

Calculer les intégrales suivantes:

1. $I = \int_1^2 \frac{1}{t-3}\mathrm{dt}$,
2. $J = \int_1^4 \frac{1}{x-3\sqrt{x}}\mathrm{dx}$
(indication: on pourra faire un changement de variable en posant $x = t^2$).

Solution:

1. La fonction définie sur l'intervalle $[1, 2]$ par $t \mapsto \frac{1}{t-3}$ admet pour primitive $\ln(|t-3|)$. On a donc $I = \Big[\ln(|t-3|)\Big]_1^2 = -\ln(2)$.
2. Le changement de variable $x = t^2$ donne $\mathbf{dx} = \mathbf{2t\,dt}$ et $J = \int_1^2 \frac{2}{t-3}\mathrm{dt}$.
Ce qui donne $\boldsymbol{J = 2I = -2\ln(2)}$.

Exercice 3. (4 points)

On pose $U_1 = \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{dx}$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $U_n = \int_0^n xe^{-x}\mathrm{dx}$

1. Calculer U_1.
2. Dire si les inégalités suivantes sont vraie ou fausse en justifiant votre réponse:
   i. $U_{2006} < U_{2007}$
   ii. $1 < U_{2005}$

Solution: Une intégration par parties (on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$) montre que la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ admet pour primitive $-xe^{-x} - e^{-x}$. On en déduit:

1. $\boldsymbol{U_1 = \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{dx} = \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - 2e^{-1}}$ et d'une manière générale, $\boldsymbol{U_n = 1 - (n+1)e^{-n}}$.
2.
   i. On a $\boldsymbol{U_{2007} = U_{2006} + \int_{2006}^{2007} xe^{-x}\mathrm{dx}}$ et comme la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est strictement positive sur $[2006, 2007]$, on obtient $\boldsymbol{U_{2006} < U_{2007}}$. L'**inégalité** proposée dans l'énoncé est donc **vraie**.
   ii. On a $\boldsymbol{U_{2005} = 1 - 2006e^{-2005}}$, donc $\boldsymbol{U_{2005} < 1}$. L'**inégalité** proposée dans l'énoncé est donc **fausse**.

Exercice 4. (3 points)

On considère sur le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$,
la fonction f définie par $f(x, y) = xy + x^2 - 1$.
Calculer l'intégrale $I = \iint_R f(x, y)\mathrm{dxdy}$.

Solution: On utilise lle théorème de Fubini. Pour $x \in [0,\ 3]$ fixé, posons $I(x) = \int_1^2 f(x,\ y)\mathrm{dy}$. Nous avons alors $I(x) = \left[\frac{1}{2}xy^2 + (x^2-1)y\right]_1^2 = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$. On en déduit $I = \int_0^3 I(x)\mathrm{dx}$, donc $\boldsymbol{I = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x\right]_0^3 = \frac{51}{4}}$.

Exercice 5. (3 points)

Soit f la fonction réelle définie sur $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{1+2\sin(x)}$.

Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en $x_0 = 0$.

Solution: Soit g la fonction définie au voisinage de $x_0 = 0$ par $g(x) = 2\sin(x)$ on a $g(x_0) = y_0 = 0$. Notons h la fonction définie au voisinage de $y_0 = 0$ par $h(x) = \frac{1}{1+x}$. Nous avons alors $f = h \circ g$. Il nous suffit donc de composer les développements limités de h et g en 0 pour en déduire celui de f.

A partir de la formule $\boldsymbol{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$ on a $\boldsymbol{g(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$.

En utilisant la formule du développement limité en 0 de la fonction usuelle $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on a $\boldsymbol{h(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)}$. Les parties régulières des développements limités à l'ordre 3 en 0 de g et h sont respectivement $P(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3$ et $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3$. La partie régulière du développement limité de $f = h \circ g$ s'obtient en tronquant $(Q \circ P)(x)$ à l'ordre 3.

Conclusion: $\boldsymbol{f(x) = 1 - 2x + 4x^2 - \frac{23}{3}x^3 + o(x^3)}$.

Exercice 6. (4 points)

On considère sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 4 en $x_0 = 2$.
2. Donner une équation de la tangente au graphe de f au point $(2, f(2))$ et étudier la position du graphe de f par rapport à cette tangente, au voisinage de $(2, f(2))$.

Solution:

1. Soient $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = e^{-x}$. On a $f = f_1 \times f_2$. On calcule le développement limité de f en faisant le produit des développements de f_1 et f_2. $f_1(x) = 2 + (x-2)$. En utilisant la formule de Taylor-Young, on a
   $f_2(x) = e^{-2}\left(1 - (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{24}(x-2)^4\right) + o((x-2)^4)$.
   En conclusion: $\boldsymbol{f(x) = e^{-2}\left(2 - (x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{12}(x-2)^4\right) + o((x-2)^4)}$.
2. A partir du développement limité de f trouvé ci-dessus, on obtient une équation de la tangente au graphe de f en $(2, f(2))$: $\boldsymbol{y = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x-2)}$.
   La position de cette tangente par rapport au graphe de f au voisinage de $(2, f(2))$ est donné par le signe de $\boldsymbol{\frac{1}{e^2}(x-2)^3}$. Cette dernière expression n'étant pas de signe constant au voisinage de 2, on en déduit que **la tangente traverse le graphe de f au voisinage de $(2, f(2))$**.