Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2006/2007

2ème SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

Corrigé de l'épreuve écrite de Mathématiques

durée: 1h 30

Calculatrices, documents et téléphones portables sont interdits

Réponses et calculs doivent être accompagnés de **justifications** sobres et pertinentes.

Tournez la page S.V.P.

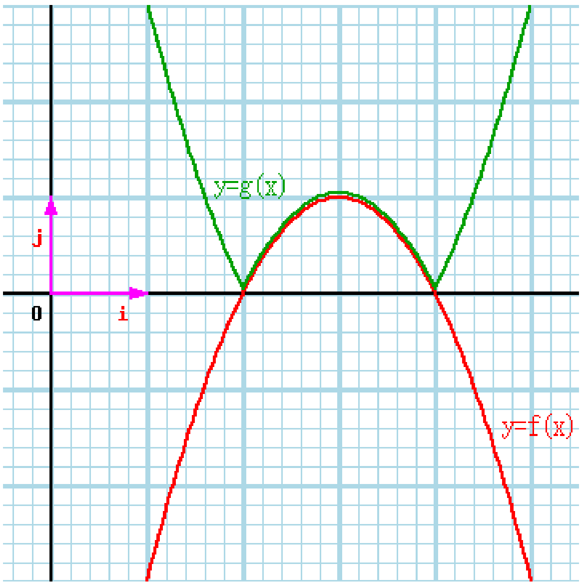
Exercice 1. (5 points)
On considère sur l'intervalle $[1, 5]$, les deux fonctions réelles f et g définies par $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, $g(x) = |f(x)|$.

a) Dans le plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dessiner les graphes des fonctions f et g.

b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}$.

Solution:

a) Le graphe de f est la parabole d'équation $y = -x^2 + 6x - 8$.
Le trinôme $-x^2 + 6x - 8$ admet pour racines, $r_1 = 2$ et $r_2 = 4$.
On a $f(x) \geqslant 0$ sur $[2, 4]$ et $f(x) < 0$ sur $[1, 2[\cup]4, 5]$.
On en déduit $g(x) = -f(x)$ si $x \in [1, 2[\cup]4, 5]$ et $g(x) = f(x)$ sur $[2, 4]$.



b) En utilisant a) on a: $\displaystyle\int_1^3 g(x)\mathrm{dx} = \int_1^2 -f(x)\mathrm{dx} + \int_2^3 f(x)\mathrm{dx} = 2.$

Exercice 2. (5 points)
Soit β un nombre réel vérifiant $2 \leqslant \beta$. On pose:

$$I_\beta = \int_2^\beta \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{dx} \quad \text{et} \quad J_\beta = \int_2^\beta \frac{1}{x(\ln(x))^3}\mathrm{dx}.$$

a) En faisant le changement de variable $x = e^t$, calculer les intégrales I_β et J_β.

b) Etudier la convergence des intégrales impropres

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{dx} \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\mathrm{dx}.$$

Solution:

a) De $x = e^t$ on obtient $\mathrm{dx} = e^t\mathrm{dt}$. Lorsque $x = 2$ on a $t = \ln(2)$ et lorsque $x = \beta$, on obtient $t = \ln(\beta)$.

Après changement de variable nous avons donc $I_\beta = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(\beta)} \frac{1}{t}\mathrm{dt} = \ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(2))$,
$J_\beta = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(\beta)} \frac{1}{t^3}\mathrm{dt} = \frac{1}{2(\ln(2))^2} - \frac{1}{2(\ln(\beta))^2}.$

b) Par définition, on a $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{dx} = \lim_{\beta\longrightarrow+\infty} I_\beta$. Or $\displaystyle\lim_{\beta\longrightarrow+\infty} I_\beta = +\infty$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{dx}$ diverge. De manière analogue on a $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\mathrm{dx} = \lim_{\beta\longrightarrow+\infty} J_\beta$. Ici cependant, $\displaystyle\lim_{\beta\longrightarrow+\infty} J_\beta = \frac{1}{2(\ln(2))^2}$.

Conclusion: lintégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\mathrm{dx}$ converge vers $\displaystyle\frac{1}{2(\ln(2))^2}$.

Exercice 3. (`5 points`)
On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$, le domaine D défini par

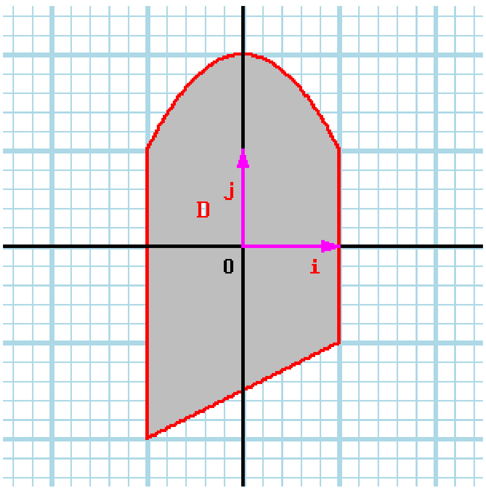
$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{1}{2}(x-3)\leqslant y\leqslant 2-x^2\}.$$

a) Dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, dessiner le domaine D.

b) Soit $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(x,y)=3xy$.
Calculer l'intégrale $\displaystyle I=\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Solution:

a) Le domaine D est définie par les deux droites verticales d'équation $x=-1$, $x=1$, la droite oblique d'équation $y=\frac{1}{2}(x-3)$ et la parabole d'équation $y=2-x^2$.



b) L'intégrale $\displaystyle I=\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$ se calcule en utilisant le théorème de Fubini:

$$I=\int_{-1}^{1}\left[\int_{\frac{1}{2}(x-3)}^{2-x^2} 3xy\,\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_{-1}^{1} 3x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}(x-3)}^{y=2-x^2}\mathrm{dx}.$$

En explicitant les calculs, cela donne $\displaystyle I=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(x(2-x^2)^2-x(\frac{1}{4}(x-3)^2\right)\mathrm{dx}$, et au final $I=\dfrac{3}{2}$.

Exercice 4. (`5 points`)
Soit f la fonction réelle définie par la formule $f(x)=e^{(x+1)}\times\sqrt{x+2}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en $x_0 = -1$.

c) Donner une équation de la tangente au graphe de f au point $(-1, f(-1))$ et préciser la position du graphe de f par rapport à cette tangente, au voisinage de $(-1, f(-1))$.

Solution:

a) Le domaine de définition de f est l'intervalle $[-2, +\infty[$

b) Posant $f_1(x) = e^{x+1}$ et $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, on remarque que $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$. Il suffit de calculer les développements limités de f_1 et f_2 à l'ordre 2 en $x_0 = -1$ pour en déduire par multiplication, celui de f.

On trouve: $f_1(x) = 1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + o((x+1)^2)$,
$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{8}(x+1)^2 + o((x+1)^2)$.
On en déduit finalement $f(x) = 1 + \frac{3}{2}(x+1) + \frac{7}{8}(x+1)^2 + o((x+1)^2)$.

c) Une équation de la tangente au graphe de f au point $(-1, f(-1))$ est donnée par $y = 1 + \frac{3}{2}(x+1)$. Au voisinage du point $(-1, f(-1))$, $f(x) - (1 + \frac{3}{2}(x+1))$ a même signe que l'expression $\frac{7}{8}(x+1)^2$.

On en déduit qu'au voisinage de $(-1, f(-1))$ le graphe de f est au dessus de la tangente en ce point.
