Notes de cours

Yameogo Joachim

MATHÉMATIQUES

Laboratoire J.A. Dieudonné
UFR Sciences Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02

Email : `yameogo@math.unice.fr`

Chapitre 1
Formule de Taylor, développements limités

1.1 Formule de Taylor en une variable réelle

Etant donnés un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$ on essaie, quand c'est possible, de ramener l'étude de f au voisinage de x_0, à celle d'un polynôme dépendant de x_0 et de f.

Définition 1.1. (rappel) *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, n un entier naturel. On dit qu'une application non nulle $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré n s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout $x \in I$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.*

Note 1.2. (Propriétés)

a) Soient$f$ et g sont deux fonctions polynomiales non nulles de degrés respectifs n et m, définies sur le même intervalle I alors

   1. la fonction produit $f \times g$ est polynomiale de degré $n + m$
   2. la fonction somme $f + g$, si elle n'est pas nulle, est polynomiale de degré $s \leqslant \max\{n, m\}$ (l'inégalité pouvant être stricte)

b) Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynomiales non nulles de degrés respectifs n et m. On suppose que l'image de I par f est contenu dans J ($f(I) \subset J$). Alors l'application composée $g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré $n \times m$.

Exemple 1.3. Les applications suivantes sont polynomiales:

1. $f\colon [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 - x^3$ (polynomiale de degré 3).
2. $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^5 + \frac{3}{5}$ est polynomiale de degré 5 et $g \circ f$ qui est définie sur $[-2, 3]$ par la formule $g \circ f(x) = (2 - x^3)^5 + \frac{3}{5}$ est polynomiale de degré 15.
3. $h\colon [0, +\infty[$ définie par $h(x) = 7$. Ici h est constante non nulle, donc polynomiale de degré 0.
   Pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, la fonction identiquement nulle sur I est aussi une fonction polynomiale. Le polynôme nul n'a pas de degré, ou si l'on veut, il a n'importe quel degré. Néanmoins, il arrive que par convention, on lui attribue le degré $-\infty$ ($\mathsf{deg}(0) = -\infty$), ce qui est commode pour étendre les propriétés de *degré d'une somme* et *degré d'un produit* de polynômes.

Exemple 1.4. (approximation affine)
Soit $f\colon]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par la formule $f(x)=\sqrt{x}$.
Considérons f au voisinage de $x_0=1$. Donner une approximation affine de f en x_0 c'est donner une fonction affine (polynomiale de degré au plus 1) P définie par $P(x)=a_0+a_1(x-x_0)$ telle que la différence $(f(x)-P(x))$ soit négligeable par rapport à $(x-x_0)$. Plus précisément on veut écrire

$$f(x)=P(x)+(x-x_0)\times\varepsilon(x-x_0) \text{ avec } \lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon(x-x_0)=0.$$

La fonction f ici étant dérivable en x_0, de l'écriture
$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+(x-x_0)\times\varepsilon(x-x_0)$ on déduit tout de suite:

- $a_0=f(x_0)$
- $a_1=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ (par définition de la dérivée en x_0)

L'approximation affine de f en x_0 est donc la fonction affine

$$x\mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Ici nous avons $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, valable sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$. On en déduit que l'écriture souhaitée est $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)+(x-1)\times\varepsilon(x-1)$.
Géométriquement, cela signifie que l'on approxime le graphe de f par sa tangente en le point $(x_0,\ f(x_0))$. Ainsi, si $x=1+\delta$, avec δ assez petit (par exemple $\delta=0.1$), alors $\sqrt{1.1}$ est approximée au premier ordre par $1+\frac{0.1}{2}=1.05$.

Note 1.5. Les formules de Taylor vont nous permettre, pour des fonctions suffisamment dérivables, de faire des approximations d'ordre 2 (quadratiques) ou plus fines d'ordre plus élevé au voisinage d'un point x_0.

Définition 1.6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction.*
Pour un entier naturel n donné, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n existent et sont continues sur I.
Lorsque $n=0$, dire que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I signifie tout simplement que f est continue sur I.

Théorème 1.7. (Taylor avec reste sous la forme de Lagrange)
Soient $[a,b]\subset\mathbb{R}$ $(a\neq b)$ un intervalle, $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$.
Alors il existe un point $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Cette formule est appelée formule de Taylor avec reste sous la forme de Lagrange ou formule de Taylor-Lagrange. Le reste étant l'expresssion $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.
Dans le cas où $a=0$ cette formule est dite de Mac-Laurin.

Remarque 1.8.
Pour $n=0$, la formule du théorème 1.7 ci-dessus s'écrit $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$. C'est la formule dite des accroissements finis. *Le théorème des accroissements finis dit que si f est continue sur* $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors le graphe de f admet en un certain point $(c,\ f(c))$ ($c\in]a,\ b[$), une tangente parallèle à la corde joignant les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.