Remarque 1.9. Dans le théorème 1.7, on peut échanger les rôles de a et b dans la formule et avoir

$$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\cdots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}.$$

Pour s'en convaincre, remplacer dans la formule du théorème, f par $g=f\circ\varphi$ où $\varphi\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x)=a+b-x$; on a $g^{(i)}=(f^{(i)}\circ\varphi)\times(-1)^i$. Ainsi, si f est une fonction réelle $(n+1)$ fois dérivable au voisinage de 0, en posant $a=0$ et $b=x$ ($x>0$ ou $x<0$), on a

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\text{ avec } |c|<|x|.$$

Corollaire 1.10. *Soient $[a,b]$ $(a\neq b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M\in[0,+\infty[$ tel que pour tout $x\in]a,b[$, $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$.*

Alors on a $$\left|\boldsymbol{f(b)-\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i}\right|\leqslant \boldsymbol{M\times\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Exemple 1.11. Prenons $a=0$, $b=1$ et $f\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x$. Quel que soit l'entier naturel i, on a $f^{(i)}(x)=e^x$. La fonction $x\mapsto e^x$ est grossièrement majorée par 3 sur $[0,1]$. On a donc par exemple l'inégalité suivante:

$$\left|e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right|\leqslant 3\times\frac{1}{6!}=\frac{1}{240}.$$

On en déduit par exemple que $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}$ est une valeur approchée de e à $\frac{1}{240}\approx 0,0042$ près. En fait on a $\left|e-\frac{163}{60}\right|<\frac{2}{1000}$.

Théorème 1.12. ***(formule de Taylor-Young)*** *Soient $x_0\in\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de x_0. On suppose que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors il existe une fonction $\boldsymbol{\varepsilon\colon x\mapsto\varepsilon(x)}$ définie au voisinage de x_0 telle que $\boldsymbol{\lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon(x)=0}$ et vérifiant la formule*

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+(x-x_0)^n\times\varepsilon(x)}.$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young.

Si on pose $\boldsymbol{h=x-x_0}$, la formule de Taylor-Young s'écrit:

$$\boldsymbol{f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+h^n\varepsilon(h)}\ \text{ où }\ \boldsymbol{\lim_{h\longrightarrow 0}\varepsilon(h)=0}\ .$$

Définition 1.13. *Soient $x_0\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0 et telle que les dérivées successives $f'(x_0),\dots,f^{(i)}(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0)$ existent. On appelle* ***développement de Taylor à l'ordre n de f en x_0****, la fonction polynomiale $T_n(f,x_0)$ définie au voisinage de x_0 par* $\boldsymbol{T_n(f,x_0)(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}$.

Exemple 1.14. Soit $f\colon \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$.
Calculons le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $x_0 = 0$.
Solution: la fonction f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et on a:
$f'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}$, $f''(x) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times (1+x)^{-\frac{7}{4}}$.
D'où $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{4}$, $f''(0) = -\frac{3}{16}$.
Le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $x_0 = 0$ est donc
$T_2(f,0)(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2$.

Exemple 1.15. Soit $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 - \cos(2x)$.
Donner le développement de Taylor à l'ordre 3 de g en 0.
Solution: on a $g'(x) = 2\sin(2x)$, $g''(x) = 4\cos(2x)$, $g^{(3)}(x) = -8\sin(2x)$,
d'où $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 4$, $g^{(3)}(0) = 0$.
Le développement de Taylor à l'ordre 3 de g en 0 est $\boldsymbol{T_3(g,0) = 2x^2}$.
On notera ici que $T_1(g,0)(x) = 0$, $T_2(g,0)(x) = 2x^2$.

1.2 Développements limités

Définition 1.16. *Soit f une fonction réelle de la variable réelle x, définie au voisinage d'un point x_0. On dit que f admet un* ***développement limité d'ordre n en x_0 ($n \in \mathbb{N}$)****, s'il existe un* ***polynôme P_n*** *de degré au plus n et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que:*$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)}$*, avec* $\boldsymbol{\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0}$.
Autrement dit, f admet un développement limité d'ordre n en x_0, si on peut trouver un polynôme P_n de degré au plus n tel que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0}$.

Exemple 1.17. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, la formule de Taylor-Young donne un développement limité de f en x_0. Ainsi, un développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto 1 - \cos(2x)$ est donné par
$1 - \cos(2x) = 2x^2 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Note 1.18.

1. Si f, définie au voisinage de x_0 admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors f est continue en x_0.
2. Si f admet un développement limité d'ordre n avec $n \geqslant 1$ en x_0, alors f est dérivable en x_0.

Note 1.19. (les notations o (petit o) et O (grand o))

1. Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est un "petit o de g" et on écrit $f = o(g)$ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$.
   On notera que si pour $x \neq x_0$, on a $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, dire que $f = o(g)$ c'est dire que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   Quelques exemples:

   a) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$, on a $f = o(1)$ au voisinage de x_0.

   b) Si $n_1 < n_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$), alors on a $x^{n_2} = o(x^{n_1})$ au voisinage de 0.

2. Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est un "grand o de g" et on écrit $f = O(g)$ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ψ définie au voisinage de x_0 telle que ψ est bornée au voisinage de x_0 et $f(x) = g(x) \times \psi(x)$.
   Si pour $x \neq x_0$, on a $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, dire que $f = O(g)$ c'est dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M$ au voisinage de x_0 .

Remarque 1.20.

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors on peut utiliser l'une ou l'autre des écritures suivantes:

   a) $f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

   b) $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$

2. Supposons que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par un polynôme P_n de degré au plus n.
   Si le quotient $\dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$ est borné au voisinage de x_0, alors on peut écrire $f(x) = P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1})$.

Théorème 1.21. (unicité du développement limité) *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en le point $x_0 \in \mathbb{R}$.*
Si P_n et Q_n sont des polynômes de degré au plus n tels que
$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)}$ *et* $\boldsymbol{f(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n)}$,
alors on a $\boldsymbol{P_n = Q_n}$.

Définition 1.22. *Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, le polynôme P_n tel que $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) = P_n(x) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$ est appelé partie régulière du développement limité d'ordre n de f en x_0 et*
$o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$ est le reste correspondant.

Remarque 1.23. (A RETENIR) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ au voisinage de x_0 telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors la formule de Taylor-Young fournit le développement limité de f à l'ordre n en x_0:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)}.$$