1.3 Quelques techniques de calcul des DL

Théorème 1.24. (troncation)
Soient m et n deux entiers naturels tels que $n < m$, f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un développement limité d'ordre m en x_0 donné par $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_m(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)$, alors par troncation, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 donné par
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$.

Théorème 1.25. (DL d'une combinaison linéaire)
Soient f et g deux fonctions réelles admettant chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ admet un développement limité d'ordre n en x_0.
Plus précisément, si P_n et Q_n sont des polynômes de degré au plus n tels que
$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n)$,
alors on a $(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha P_n + \beta Q_n)(x) + o((x - x_0)^n)$.

Corollaire 1.26. (Conséquence du théorème d'unicité du DL) *Soit f une fonction réelle définie au voisinage de 0 et admettant un développement limité d'ordre n donné par $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ ($\deg(P_n) \leqslant n$).*

1. *Si f est une fonction paire, alors dans les termes non nuls du polynôme P_n, il n'apparaît que des puissances paires.*
2. *Si f est une fonction impaire, alors dans les termes non nuls du polynôme P_n, il n'apparaît que des puissances impaires.*

Note 1.27. (DL de fonctions usuelles à retenir absolument)
Les formules ci-dessous concernent des développements limités de fonction usuelles en 0. Ces formules sont obtenues par application du théorème de Taylor-Young en le point $x_0 = 0$.

1. $\boldsymbol{e^x = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} x^i + o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
   $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
2. $\boldsymbol{\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{i=n} x^i + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$
3. $\boldsymbol{\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i x^i + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$
4. $\boldsymbol{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} x^i + o(x^n)}$

   formule qui s'écrit encore

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

5. $\mathbf{\ln(1-x)=-\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i}x^i\right)+o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$
$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$

6. $\mathbf{\ln(1+x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i+o(x^n)}$ ou, en explicitant le signe $\sum$
$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$

7. Développement limité de $\sin(x)$ en 0, à l'ordre $\boldsymbol{n}$ (valable pour $n=2p+1$ ou $n=2p+2$): $\mathbf{\sin(x)=\sum_{i=0}^{i=p}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}+o(x^{2p+2})}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
$\sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}+o(x^{2p+2}).$

8. Développement limité de $\cos(x)$ en 0, à l'ordre $\boldsymbol{n}$ (valable pour $n=2p$ ou $n=2p+1$): $\mathbf{\cos(x)=\sum_{i=0}^{i=p}\frac{(-1)^i}{(2i)!}x^{2i}+o(x^{2p+1})}$ ou, en explicitant le signe $\sum$,
$\cos=1-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}+o(x^{2p+1})$

Théorème 1.28. (DL d'un produit) *Soient f et g deux fonctions réelles, admettant au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$, un développement limité à l'ordre n en x_0. Alors la fonction produit $f\times g$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. La partie régulière du développement limité de $f\times g$ s'obtient en tronquant à l'ordre n, le produit des parties régulières de f et g.*

$$\textit{Si } f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n) \textit{ et } g(x)=Q_n(x)+o((x-x_0)^n),$$
$$\textit{alors } (f\times g)(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$$

où $T_n(x)$ est le produit $P_n(x)\times Q_n(x)$ amputé de ses termes de degrés strictement plus grands que n.

Théorème 1.29. (DL d'une composée) *Soient f une fonction réelle définie au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$ et g une fonction réelle définie au voisinage de $f(x_0)$ et n un entier naturel. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 et g admet un développement limité à l'ordre n en $f(x_0)$, alors la composée $h=g\circ f$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. Plus précisément, si P_n (resp. Q_n) est la partie régulière du développement limité à l'ordre n de f (resp. g) en x_0 (resp. $f(x_0)$) alors la partie régulière T_n de $h=g\circ f$ s'obtient en tronquant à l'ordre n, la composée $Q_n\circ P_n$.*

Exemple 1.30. **($f(x_0)=1$, DL de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0)** Soit f une fonction réelle définie au voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 1$ et admettant un développement limité d'ordre n en x_0. Alors $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ admet un développement limité d'ordre n en x_0. Plus précisément, le développement limité de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0 s'obtient de la manière suivante:

1. posons $\boldsymbol{u(x)=1-f(x)}$. La fonction u est définie au voisinage de x_0 et on a $u(x_0)=0$.
2. posons $\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{1-x}}$. g est définie au voisinage de $0=u(x_0)$.
3. nous avons $\boldsymbol{h(x)=(g\circ u)(x)}$.
4. Si nous disposons du DL de f, alors nous en déduisons celui de u. Le DL de g en 0 est fournie par les formules des fonctions usuelles. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1.29 pour obtenir le DL de $\frac{1}{f(x)}$ en x_0 en utilisant le DL de f en x_0.

1.4 Etude de graphe au voisinage d'un point

Théorème 1.31. *Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$.*
On suppose que f admet un développement limité d'ordre $n\geqslant 1$ en x_0.
Dans ces conditions, si la partie régulière de f est donnée par
$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$, alors la tangente au graphe de f en $(x_0,f(x_0))$ admet pour équation $\boldsymbol{y=a_0+a_1(x-x_0)}$.

Théorème 1.32. *Soit f une fonction réelle* ***définie sur un intervalle ouvert contenant*** *le point $x_0\in\mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre $n\geqslant 2$ en x_0.*

Soit $\boldsymbol{P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n}$ la partie régulière du développement limité à l'ordre n de f en x_0.

On suppose que les coefficients a_i ($i\geqslant 2$) ne sont pas tous nuls. Dans ces conditions, soit k le plus petit entier naturel compris entre 2 et n tel que $a_k\neq 0$. Alors pour x assez proche de x_0, $\boldsymbol{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}$ a même signe que l'expression $\boldsymbol{a_k(x-x_0)^k}$.

1. *Si **k est pair et $a_k>0$**, alors au voisinage du point $M_0=(x_0,f(x_0))$, le graphe de f est au dessus de la tangente en ce point. En particulier si x_0 est un point critique de f (i.e. $f'(x_0)=0$), $f(x_0)$ est un minimum local de f.*
2. *Si **k est pair et $a_k<0$**, alors au voisinage du point $M_0=(x_0,f(x_0))$, le graphe de f est au dessous de la tangente en ce point. En particulier si x_0 est un point critique de f (i.e. $f'(x_0)=0$), $f(x_0)$ est un maximum local de f.*
3. *Si **k est impair**, alors au voisinage du point $M_0=(x_0,f(x_0))$, la tangente traverse le graphe de f en ce point. M_0 est du type point d'inflexion et le signe de l'expression $a_k(x-x_0)^k$ n'est pas constant.*

1.5 DL d'ordre 2 pour une fonction de deux variables

Définition 1.33. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues sur U.*

Théorème 1.34. (Schwarz)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Théorème 1.35. *Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables réelles, définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors il existe une fonction ε définie au voisinage de (x_0, y_0) telle que:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\times(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\times(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\times(y-y_0)^2\right) + \|(x-x_0, y-y_0)\|^2\varepsilon(x,y)$$

avec $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$.

Dans la formule ci-dessus (qui est le développement limité de f à l'ordre 2 en (x_0, y_0)), on a par définition $\|(x-x_0, y-y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Définition 1.36.
Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. *La matrice* $H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ *est appelée matrice **hessienne** de f en (x_0, y_0).*
2. *Le déterminant* $D(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2$ *de la matrice ci-dessus est appelé **hessien de f** en (x_0, y_0).*

Note 1.37.
Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) est donnée par
$$\boldsymbol{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)}.$$
2. Si (x_0, y_0) est un point critique de f et si le hessien
$$\boldsymbol{D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2}$$
de f en (x_0, y_0) n'est pas nul, alors son signe permet de déterminer la nature du point critique (x_0, y_0).

Théorème 1.38. *Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et admettant (x_0, y_0) pour point critique.*

On pose $\boldsymbol{D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2}$.

1. *Si* $\boldsymbol{D(x_0, y_0) > 0}$ *et* $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0}$, *alors f admet un* ***minimum local*** *en (x_0, y_0)*
2. *Si* $\boldsymbol{D(x_0, y_0) > 0}$ *et* $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0}$, *alors f admet un* ***maximum local*** *en (x_0, y_0)*
3. *Si* $\boldsymbol{D(x_0, y_0) < 0}$, *alors (x_0, y_0) est un* ***point critique de type selle****.*
Le plan tangent (d'équation $z = f(x_0, y_0)$) traverse la surface d'équation $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exercice 1.1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f(x, y) = xy(3 - x - y)}$.

1. Donner une équation du plan tangent P à la surface S d'équation $z = f(x, y)$ en $(1, 1, 1)$.
2. Etudier la position du plan tangent P par rapport à S au voisinage de $(1, 1, 1)$.