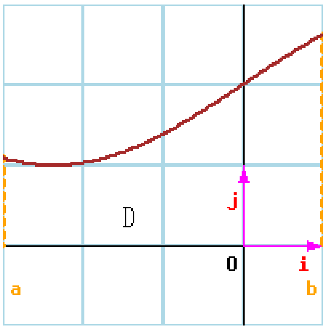
Chapitre 2

Intégration: fonction réelle d'une variable réelle.

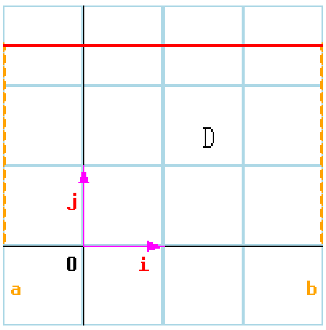
2.1 Introduction: calculer une aire

On suppose le plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $(a<b)$, une fonction réelle positive (et continue) $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
Soit le domaine D défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.
On voudrait calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D.

i. Dans le cas général, trouver une formule "simple" calculant $\mathcal{A}$ peut se révéler difficile, voire impossible.

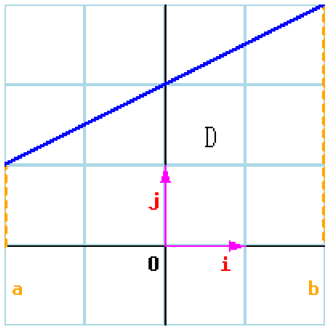


ii. Si f est constante sur $[a,b]$ (i.e. $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b]$, $f(x) = k$), alors l'aire $\mathcal{A}$ de D est celle d'un rectangle: $\mathcal{A} = k \times (b-a)$.



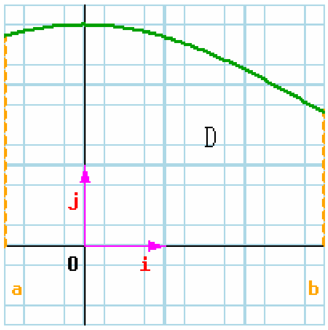
iii. Si f est affine sur $[a,b]$ (i.e. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b]$, $f(x) = \alpha x + \beta$), alors l'aire $\mathcal{A}$ de D est la somme des aires d'un rectangle et d'un triangle.
C'est aussi l'aire du trapèze de sommets $(a,0), (a, f(a)), (b, f(b))$ et $(b,0)$:

$$\mathcal{A} = (f(a) + f(b)) \times \frac{(b-a)}{2}$$



2.2 Intégrale simple

Dans ce paragraphe, on va donner un aperçu de la définition formelle d'une fonction intégrable. Pour commencer, voici comment on approxime une aire avec des rectangles.



Soient f une fonction **continue et positive** définie sur un intervalle $[a,\ b]$ $(a<b)$, D le domaine compris entre le graphe de f et les droites d'équations
$x=a,\ x=b,\ y=0$: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$.
L'aire $\mathcal{A}$ de D peut être approximée de la manière suivante:

- On considère une subdivision $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ de l'intervalle $[a,\ b]$. Le nombre $h=\max\{(x_i-x_{i-1})\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelé pas de la subdivision. La subdivision est dite régulière si on a $h=\dfrac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$ quel que soit i: $1\leqslant i\leqslant n$.
- Pour une telle subdivision, on prend sur l'intervalle $[x_{i-1},\ x_i[$ $(i\geqslant 1)$ un point quelconque c_i et on considère le rectangle R_i de base $[x_{i-1},\ x_i]$ et de hauteur $f(c_i)$ (rappelons que f est positive).
  Le rectangle R_i a pour aire $\mathcal{A}_i=f(c_i)\times(x_i-x_{i-1})$.
- La somme des aires des rectangles R_i est $I_n=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,(x_i-x_{i-1})$.

  I_n est une approximation de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D. Pour simplifier, prenons la subdivision régulière. Intuitivement, plus n sera grand (i.e. plus notre subdivision sera fine), plus I_n s'approchera de l'aire de D. La somme I_n est appelée somme de Riemann (célèbre mathémathicien allemand du 19ème siècle: 1826-1866).

On peut prouver le théorème suivant (que nous admettrons):

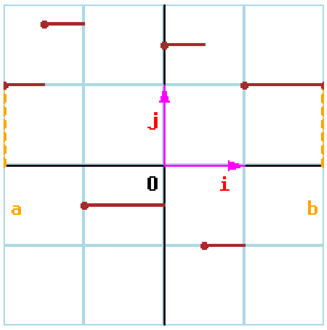
Théorème 2.1. *Avec les notations et hypothèses précédentes, on a:* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \mathcal{A}$

Remarque 2.2. Nous aurions pu approximer l'aire du domaine D en utilisant les aires des trapèzes T_i de sommets $(x_{i-1}, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_i, 0)$: on a $\text{aire}(T_i) = \dfrac{(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \times (x_i - x_{i-1})}{2}$.

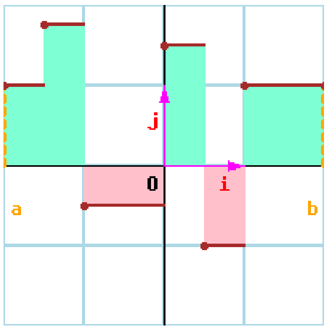
Exemple 2.3. f: $[0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$. Approximons par des rectangles ou des trapèzes, l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$ en utilisant la subdivision $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 = 3$ où $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Définition 2.4. (Intégrale définie d'une fonction en escalier)

- *Une fonction* f: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite en escalier s'il existe une subdivision* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ $(n \geqslant 1)$ *telle que* f *est constante sur chaque intervalle* $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.



- *L'intégrale (définie) sur* $[a, b]$ *d'une fonction en escalier* f *est la somme* ***algébrique*** *des aires des rectangles* R_i *de base* $[x_{i-1}, x_i]$ *et de hauteur* $|f(c_i)|$ *pour* $c_i \in]x_{i-1}, x_i[$. *Cette somme est notée* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



(L'aire d'un rectangle situé au dessus de l'axe des abscisses sera comptée positivement, tandis que celle d'un rectangle situé en dessous de l'axe des abscisses sera comptée négativement)