

Définition 2.5. (Intégrabilité au sens de Riemann)

Une fonction réelle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite intégrable sur $[a, b]$, si $\forall \epsilon > 0, \exists f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions en escaliers telles que:

1. $f_1 \leq f \leq f_2$ (i.e. $\forall x \in [a, b], f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$)

2. $\left| \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx \right| < \epsilon$

Théorème 2.6. (Intégrale définie)

On suppose que la fonction réelle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$.

Considérons alors une subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ($n \geq 2$)

de pas $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$) et posons $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Alors la suite réelle de terme générale I_n converge dans \mathbb{R} et sa limite, notée

$$\int_a^b f(x) dx \text{ est appelée intégrale définie de } f \text{ sur } [a, b].$$

Dans ce cours nous nous intéresserons essentiellement aux fonctions continues et aux fonctions continues par morceaux, définies sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} .

Définition 2.7. On dit que la fonction de la variable réelle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux si f est bornée et l'ensemble des points de discontinuité de f est de cardinal fini.

Nous admettrons et utiliserons souvent le théorème suivant:

Théorème 2.8. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Alors toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$.

Note 2.9. Dans l'expression $\int_a^b f(x) dx$, a et b sont les bornes d'intégration, x est la variable d'intégration; c'est une variable muette. Elle peut donc être remplacée par toute autre variable, à l'exception de celles des bornes d'intégration et bien sûr de la variable utilisée pour nommer la fonction. Ainsi, si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$, on a les égalités suivantes:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(v) dv = \int_a^b f(y) dy.$$

2.3 Les propriétés des intégrales définies

On suppose dans la liste des propriétés ci-dessous que $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , f et g sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. Quand les bornes d'intégration sont confondues:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. La relation de Chasles:

$$\forall c \in [a, b], \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

3. Quand on permute les bornes d'intégration:

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

4. La linéarité:

$$\text{i. } \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales)

$$\text{ii. } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

5. Quand le graphe d'une des fonctions est toujours au dessus de l'autre:

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

6. Comparaison de la valeur absolue de l'intégrale et de l'intégrale de la valeur absolue:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

2.4 Primitives: calcul d'intégrales définies

Souvent, dans la pratique, calculer une intégrale définie se ramènera pour nous, à chercher une primitive pour la fonction à intégrer.

Définition 2.10. Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. On appelle primitive de f , toute fonction dérivable F définie sur $[a, b]$ et vérifiant $F' = f$.

Exemple 2.11.

- Sur l'intervalle $[-1, 2]$, la fonction F définie par $F(x) = -\cos(x)$ est une primitive de la fonction f définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) = \sin(x)$.
- Sur un intervalle quelconque $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f: x \mapsto x$.
De même, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 1$ est une primitive de $f: x \mapsto -x$.

Théorème 2.12.

Si la fonction $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F , alors les primitives de f sont toutes les fonctions G de la forme $G = F + \lambda$ pour λ parcourant \mathbb{R} .

Démonstration.

La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on vérifie facilement que si f admet F pour primitive, alors toute fonction G de la forme $G = F + \lambda$ est une primitive de f . Réciproquement, si H est une primitive de f , considérons la fonction $(H - F)$ qui est définie et dérivable sur $[a, b]$. Dérivant $(H - F)$, on obtient $(H - F)' = H' - F'$, et comme par hypothèse $H' = f$ et $F' = f$, on a $(H - F)' = 0$. Conclusion: $(H - F)$ est une constante réelle. \square

Corollaire 2.13. Soient $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle supposée admettre une primitive F , $x_0 \in [a, b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule primitive de f prenant la valeur y_0 en x_0 .

Exemple 2.14. Soit $f: [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$. f admet une unique primitive F , prenant la valeur 3 en 1. Pour déterminer F , on écrit que toute primitive de f est de la forme $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda$ où λ est une constante réelle.

La condition $F(1) = 3$ fixe la valeur de la constante λ . $F(1) = 3$ si et seulement si $\lambda = \frac{7}{2}$. Conclusion: $F(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 7)$.

D'une manière générale, si on connaît une primitive quelconque G de la fonction $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la primitive F de f prenant la valeur y_0 en x_0 est définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.

Note 2.15. Une primitive (quelle qu'elle soit) de $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi appelée intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(x)dx$ (noter l'absence de bornes).

Remarque 2.16. (conséquence de la linéarité de la dérivation)

1. Pour deux fonctions $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si F et G sont des primitives respectives de f et g , alors la somme $(F + G)$ est une primitive de $(f + g)$.
2. Si f est une primitive de f , alors pour tout réel λ , (λF) est une primitive de (λf) .

Théorème 2.17. (théorème de la moyenne) Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(Le nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$).

En utilisant le théorème de la moyenne on peut prouver le théorème fondamental suivant:

Théorème 2.18. Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Etant donné un point $x_0 \in [a, b]$, l'application $F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \text{ est une primitive de } f. \text{ Cette primitive s'annule en } x_0.$$

Dans la pratique, c'est le corollaire suivant que l'on applique pour calculer l'intégrale définie d'une fonction dont on connaît une primitive.

Théorème 2.19. Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Si F est une primitive de f , alors on a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

2.5 Techniques d'intégration

Dans ce paragraphe, on décrit les techniques de base à maîtriser pour mener à bien le calcul d'une intégrale définie.

2.5.1 Primitives de fonctions usuelles

La liste de primitives de fonctions usuelles à connaître:

Primitives de quelques fonctions usuelles (λ est une constante réelle)	
1) pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, on a	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
2)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \lambda$
3) pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, on a	$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + \lambda$
4) pour un réel a strictement positif et différent de 1,	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$
5)	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + \lambda$
6)	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + \lambda$

2.5.2 Technique d'intégration par parties

La technique d'intégration par parties est fondée sur la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables: $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Théorème 2.20. Soient u et v deux fonctions réelles continûment dérivables (i.e. des fonctions dérivables et dont les dérivées sont continues) sur un intervalle I . Alors la fonction réelle produit $u' \times v$ admet une primitive sur I et on a:

$$1. \int (u' \times v)(x) dx = (u \times v)(x) - \int (u \times v')(x) dx$$

2. si a et b sont deux points de I ,

$$\int_a^b (u' \times v)(x) dx = [(u \times v)(x)]_a^b - \int_a^b (u \times v')(x) dx$$

(dans cette formule, $[(u \times v)(x)]_a^b$ désigne $(u(b) \times v(b) - u(a) \times v(a))$)

Exemple 2.21.

- Calculer une primitive de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^{-x}$.
Solution:

- On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$, ce qui donne par exemple $u(x) = -e^{-x}$ en utilisant les formules des primitives des fonctions usuelles (ici, c'est la formule associée à $x \mapsto e^{\alpha x}$ que l'on applique avec $\alpha = -1$). On a $v'(x) = 1$.

b) En utilisant le a) et la technique d'intégration par parties, on obtient:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int 1 \times (-e^{-x}) dx.$$

On en déduit $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + \lambda$, où λ est une constante réelle quelconque.

Note: nous aurions pu poser $u'(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$, ce qui aurait donné: $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ par exemple, et $v'(x) = -e^{-x}$.

En appliquant la formule d'intégration par parties cela aurait donné:

$$\int x e^{-x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + \int \frac{1}{2}x^2 \times e^{-x} dx. \text{ Ce qui nous amène à calculer}$$

$\int x^2 e^{-x} dx$. On voit que cette dernière primitive à calculer n'est pas forcément plus simple que $\int x e^{-x} dx$.

Conclusion: dans la formule d'intégration par parties ci-dessus, un choix judicieux de u' et v s'impose.

2. Calculer une primitive de la fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

Solution: on pose $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x)$, d'où $u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ et alors

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx, \text{ ce qui donne}$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + \lambda \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle quelconque.}$$