2.5.3 Changement de variable

La technique du changement de variable se fonde sur la règle de dérivation d'une fonction composée, rappelée ci-dessous.

Théorème 2.22. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.*
On suppose que φ: $J \longrightarrow \mathbb{R}$ et h: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables et que l'image de J par φ est contenue dans I (ce qui s'écrit: $\varphi(J) \subset I$).

Alors la fonction composée $h \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a
$\boxed{(h \circ \varphi)' = (h' \circ \varphi) \times \varphi'}$.

Lorsque les fonctions φ et h sont continûment dérivables, le théorème ci-dessus nous permet d'affirmer que si $h: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $h' = f$), alors $h \circ \varphi$ est une primitive de la fonction $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur J.

Théorème 2.23. *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, φ: $J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur un intervalle J et telle que $\varphi(J) = I$ (i.e. l'image de J par φ est égale à I). Alors on a:*

1. *Si F est une primitive de f, alors $(F \circ \varphi)(t)$ est une primitive de $f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Réciproquement, toute primitive de $f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$ est de la forme $F \circ \varphi$ où F est une primitive de f.*

   Ce fait est traduit abusivement par la formule:
$$\left(\int f(x)\mathrm{dx}\right) \circ \varphi = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}$$

2. *Si a et b sont deux points de I et α et β sont deux points de J tels que*
$$\varphi(\alpha) = a \text{ et } \varphi(\beta) = b, \text{ alors } \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

Exemple 2.24. Calculer l'intégrale suivante: $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{dx}$.

Solution: Soit φ: $[1,4] \longrightarrow \left[0, \frac{3}{2}\right]$ définie par $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$. On a $\varphi'(t) = \frac{1}{2}$; φ est strictement croissante et $\varphi([1,4]) = \left[0, \frac{3}{2}\right]$. En utilisant le théorème précédent, on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{dx} = \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{dt}$.

Dans la pratique on procède quasi mécaniquement comme suit:
on fait un changement de variable en posant $\boldsymbol{2x+1=u}$, ce qui donne par différentiation $\mathbf{2dx = du}$, donc $\mathbf{dx} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\mathbf{du}$. Lorsque $x=0$, on a $u=1$ et lorsque $x=\frac{3}{2}$, on a $u=4$. On en déduit: $\displaystyle\boldsymbol{\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{dx} = \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{du}}$. Une primitive de la fonction usuelle $u \mapsto \sqrt{u}$ est $\displaystyle\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$, ce qui donne

$\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{du} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$. Une simple évaluation de $u \mapsto u^{\frac{3}{2}}$ en 4 et 1 nous donne ensuite $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{du} = \frac{7}{3}$. Conclusion: $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\mathrm{dx} = \frac{7}{3}$.

Exemple 2.25.
Calculer une primitive de la fonction f: $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$.
Solution: on fait un changement de variable en posant $u = 2x^2+1$, ce qui donne $\mathrm{du} = 4x\mathrm{dx}$. On en déduit $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+1}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{u}\mathrm{du}$.
Comme $\displaystyle\int \frac{1}{u}\mathrm{du} = \ln|u| + \text{cste}$, on en déduit qu'une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ est $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+1)$.

D'une manière générale, lorsque la fonction f à intégrer est de la forme $\boldsymbol{f(x) = k\dfrac{g'(x)}{g(x)}}$ où k est une constante réelle non nulle, on a $\displaystyle\boldsymbol{\int f(x)\mathrm{dx} = k\ln(|g(x)|) + \lambda}$.

Note 2.26. Étant donnée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ à calculer (on suppose f continue), quand on pose $x = \varphi(t)$, il faut déterminer l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (attention: il peut arriver que $\alpha > \beta$) tel que:

- φ est continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
- $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$

Dans ces conditions, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\mathrm{dt}$.

Exemple 2.27. (cas de fonctions paires ou impaires)
Soit a un nombre réel strictement positif. En faisant le changement de variable $u=-x$ sur l'intervalle $[-a,0]$, on obtient:

1. Soit f une fonction continue et **paire** définie sur l'intervalle $[-a,a]$. Alors on a $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{dx}=2\int_0^a f(x)\mathrm{dx}$. En effet, la relation de Chasles donne $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{dx}=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{dx}+\int_0^a f(x)\mathrm{dx}$. En posant $u=-x$ sur $[-a,0]$, on a $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{dx}=\int_a^0 -f(-u)\mathrm{du}=\int_0^a f(-u)\mathrm{du}$. f étant paire, nous avons $f(-u)=f(u)$ pour tout $u\in[0,a]$. On en déduit $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{dx}=\int_0^a f(u)\mathrm{du}$, d'où le résultat $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{dx}=2\int_0^a f(x)\mathrm{dx}$.

   Par exemple, $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{dx}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{dx}=2}$

2. Si f est une fonction continue et impaire définie sur l'intervalle $[-a,a]$, alors on a $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{dx}=0$. **Par exemple,** $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{dx}=0}$**,** $\boldsymbol{\int_{-2}^{2} x^3\mathrm{dx}=0}$**.**

Proposition 2.28. (cas de fonctions périodiques)
Soit $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction continue et périodique de période* T.

Alors pour tout $a,\ b\in\mathbb{R}$, *on a* $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=\int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{dx}$.

Démonstration. En faisant le changement de variable $u=x+T$, on a $\mathrm{du}=\mathrm{dx}$. Ce qui donne $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=\int_{a+T}^{b+T} f(u-T)\mathrm{du}$. f étant périodique de période T, on a $f(u-T)=f((u-T)+T)=f(u)$, d'où finalement
$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=\int_{a+T}^{b+T} f(u)\mathrm{du}$. □

Corollaire 2.29.
Soit $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction continue et périodique de période* T.

Alors pour tout $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, *on a* $\int_{x_1}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx}=\int_{x_2}^{x_2+T} f(x)\mathrm{dx}$.

Démonstration.
La relation de Chasles donne $\int_{x_1}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{dx}+\int_{x_2}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx}$. La proposition 1.28 nous dit que $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{dx}=\int_{x_1+T}^{x_2+T} f(x)\mathrm{dx}$. En reportant cette dernière expression dans la première ligne de notre démonstration, nous obtenons: $\int_{x_1}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx}=\int_{x_1+T}^{x_2+T} f(x)\mathrm{dx}+\int_{x_2}^{x_1+T} f(x)\mathrm{dx}$. On utilise alors la relation de Chasles pour conclure. □