Définition 2.32. *Soient $b \in \mathbb{R}$ et $f\colon]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, $(a < b)$. De manière analogue à la définition 2.31,*

on pose par définition $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{dx} = \lim_{a \longrightarrow -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$.

*L'**intégrale impropre*** $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{dx}}$ *est dite convergente si* $\displaystyle\lim_{a \longrightarrow -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *existe dans $\mathbb{R}$, elle est dite divergente sinon.*

Exemple 2.33. Calcul de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx}$.

Pour $a < 0$, on a $\displaystyle\int_{a}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{a}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2}$.

Comme $\displaystyle\lim_{a \longrightarrow -\infty} e^{-a^2} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}$.

Définition 2.34. *Soit $f\colon]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f intégrable sur tout fermé borné $[a, b]$.*

On définit l'intégrale impropre $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}}$ *de f sur $]-\infty, +\infty[$ comme suit:*

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite convergente s'il existe un point $c \in]-\infty, +\infty[$ tel que les deux intégrales impropres* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx}$ *et* $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *convergent.*
  Dans ce cas $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *a pour valeur* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx} + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$:
  $$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx} + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}}.$$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite divergente s'il existe un point $c \in]-\infty, +\infty[$ tel que l'une au moins des intégrales impropres* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx}$, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *diverge. Dans ce cas,* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *n'a pas de valeur.*

Note: L'hypothèse ***f* est intégrable sur tout fermé borné** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, nous assure que la définition 2.34 ci-dessus est indépendante du point $c \in]-\infty, +\infty[$ choisi.

Exemple 2.35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge vers π car $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge aussi vers $\dfrac{\pi}{2}$.

En effet, pour $\alpha < 0$, on a $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx} = \Big[\arctan(x)\Big]_{\alpha}^{0} = -\arctan(\alpha)$. Comme (par définition de **arctan**) $\displaystyle\lim_{\alpha \longrightarrow -\infty} \arctan(\alpha) = -\frac{\pi}{2}$, on en déduit le résultat.

2.6.2 Intégrale impropre pour une fonction non bornée

Définition 2.36. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(a < b)$, $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ non bornée telle que pour tout $\beta \in [a, b[$, f est intégrable sur $[a, \beta]$. On définit l'intégrale impropre de f sur $[a, b]$ en posant $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \lim_{\beta \longrightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)\mathrm{dx}$.*

De manière analogue, pour $g\colon]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ non bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, b]$ $(a < \alpha \leqslant b)$, on pose $\int_a^b g(x)\mathrm{dx} = \lim_{\alpha \longrightarrow a^+} \int_\alpha^b g(x)\mathrm{dx}$.

Les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ et $\int_a^b g(x)\mathrm{dx}$ sont dites convergentes si $\lim_{\beta \longrightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)\mathrm{dx}$ et $\lim_{\alpha \longrightarrow a^+} \int_\alpha^b g(x)\mathrm{dx}$ existent dans $\mathbb{R}$; elles sont dites divergentes sinon.

Exemple 2.37. Convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$.
Pour $\alpha \in]0, 1]$, on a $\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\alpha^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha}$.
Comme $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \sqrt{\alpha} = 0$, on a que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$ converge vers la valeur 2.

Définition 2.38. *La définition précédente se généralise comme suit:*
soit $f\colon]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

- *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(x)\mathrm{dx}$ et $\int_c^b f(x)\mathrm{dx}$ convergent. Dans ce cas, la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ est $\int_a^c f(x)\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\mathrm{dx}$.*
- *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ diverge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que l'une au moins des deux intégrales impropres $\int_a^c f(x)\mathrm{dx}$, $\int_c^b f(x)\mathrm{dx}$ diverge.*

On notera que comme dans le cas d'intégrales impropres sur $]-\infty, +\infty[$, cette définition est indépendante du choix du point $c \in]a, b[$.

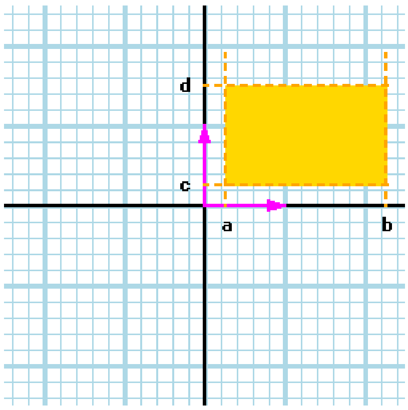
Chapitre 3
Intégrale double

Nous allons supposer le plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.1 Aperçu de la définition formelle de l'intégrale double

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Par définition, $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\}$.



Définition 3.1. (Quadrillage du rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$) *Pour définir un quadrillage du rectangle fermé $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$, on se donne:*

- *une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$,*
- *une subdivision $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ de l'intervalle $[c, d]$.*

Les rectangles constitutifs du quadrillage sont les rectangles
$R_{\text{ij}} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Le quadrillage est dit régulier si pour tout couple (i, j) $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ on a $(x_i - x_{i-1}) = \dfrac{b-a}{n}$ *et* $(y_j - y_{j-1}) = \dfrac{d-c}{m}$.

On prend alors pour pas de ce quadrillage régulier, le nombre
$h = \max\left\{\frac{b-a}{n}, \frac{d-c}{m}\right\}$.

Approximation de volume:

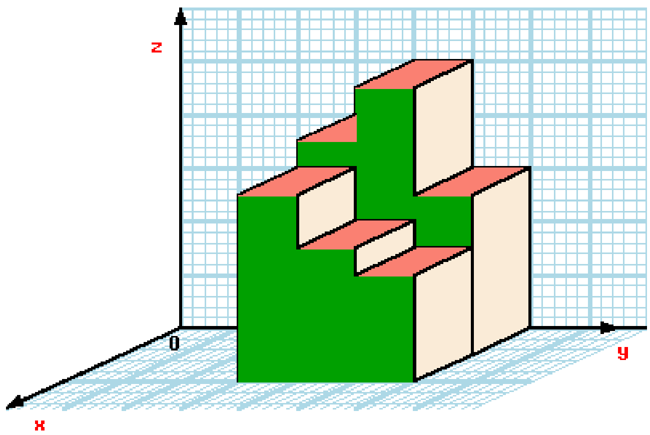
Si $R=[a,b]\times[c,d]$ $(a<b\,,c<d)$ est un rectangle fermé muni d'un quadrillage $\{R_{\mathrm{ij}}\}_{(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)}$ et $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue positive, en choisissant pour chaque couple (i,j) un point m_{ij} dans le rectangle R_{ij}, on peut approximer le volume du solide $S=\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3\,/(x,\,y)\in R,\,0\leqslant z\leqslant f(x,\,y)\}$ avec le nombre suivant (appelé aussi **somme de Riemann**):

$$v_{\mathrm{nm}}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} f(m_{\mathrm{ij}})\times(x_i-x_{i-1})\times(y_j-y_{j-1})=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m} f(m_{\mathrm{ij}})\times\mathrm{aire}(R_{\mathrm{ij}}).$$

Intuitivement, plus le quadrillage sera fin (i.e. plus le pas du quadrillage sera petit), meilleur sera notre approximation.

Définition 3.2. (fonction en escalier sur un rectangle fermé)

Soit $R=[a,\,b]\times[c,\,d]$ $(a<b\,,\,c<d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction en escalier si f est bornée sur R et s'il existe un quadrillage $\{R_{\mathrm{ij}}\}$ de R en sous rectangles $R_{\mathrm{ij}}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ tel que: pour tout couple (i,j), f est constante sur le rectangle ouvert $]x_{i-1},x_i[\times]y_{j-1},y_j[$.



Définition 3.3. (intégrale double d'une fonction en escalier)

Soit $R=[a,b]\times[c,d]$ $(a<b\,,c<d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction en escalier associée à un quadrillage $\{R_{\mathrm{ij}}\}_{(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)}$ de R. Si $\boldsymbol{k}_{\mathrm{ij}}$ est la valeur de f sur le rectangle ouvert $]x_{i-1},x_i[\times]y_{j-1},y_j[$, le nombre

$$\boldsymbol{I_R(f)}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}\boldsymbol{k_{\mathrm{ij}}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})}$$

est appelé ***intégrable double de f sur R*** *et est noté* $\displaystyle\iint_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{f(x,y)}\mathbf{dxdy}$.

Définition 3.4. *Soit* $R = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$ *un rectangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est intégrable sur* R *si pour tout réel strictement positif* ε, *on peut trouver deux fonctions en escaliers* f_1 *et* f_2 *définies sur* R *telles que:*

$$\begin{cases} \bullet\, f_1 \leqslant f \leqslant f_2 \\ \bullet \left| \displaystyle\iint_R f_2(x,y)\mathrm{dxdy} - \iint_R f_1(x,y)\mathrm{dxdy} \right| < \varepsilon \end{cases}$$

Théorème 3.5.

Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$ *un rectangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable sur* R. *Pour tout quadrillage régulier* $\{R_{\mathrm{ij}}\}_{(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)}$ *de* R, *soient* $c_{\mathrm{ij}} \in]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$, $k_{\mathrm{ij}} = f(c_{\mathrm{ij}})$ *et*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}_{nm}} = \sum_{\boldsymbol{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}} \boldsymbol{k_{\mathrm{ij}}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}.$$

Alors, lorsque m *et* n *tendent vers* $+\infty$, $\mathcal{V}_{nm}$ *admet une limite dans* $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée intégrale double de f *sur* R *et notée*

$$\boldsymbol{\iint_R f(x,y)\mathrm{dxdy}}.$$

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit* $R = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$ *un rectangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors* f *est intégrable sur* R.

Une liste de propriétés à connaître:

1. Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R alors
$$\iint_R (f+g)(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_R f(x,y)\mathrm{dxdy} + \iint_R g(x,y)\mathrm{dxdy}.$$
2. Soient f une fonction intégrable sur un rectangle fermé R et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\iint_R \lambda f(x,y)\mathrm{dxdy} = \lambda \iint_R f(x,y)\mathrm{dxdy}.$$
3. Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R telles que $\forall (x,y) \in R$, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, alors:
$$\iint_R f(x,y)\mathrm{dxdy} \leqslant \iint_R g(x,y)\mathrm{dxdy}$$
4. Si f est une fonction intégrable sur un rectangle fermé R, alors la fonction $|f|$ est intégrable sur R et on a l'inégalité
$$\left| \iint_R f(x,y)\mathrm{dxdy} \right| \leqslant \iint_R |f(x,y)|\mathrm{dxdy}.$$