3.2 Succession d'intégrales simples - Théorème de Fubini

Soit $R=[a, b]\times[c, d]$ $(a<b, c<d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x\in[a, b]$ fixé, la fonction $f(x, \bullet)\colon[c, d]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x, \bullet)(y)=f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$. Le nombre $\displaystyle\int_c^d \boldsymbol{f(x, \bullet)(t)}\mathbf{dt}$ dépend de x. On a donc une fonction $\mathcal{A}\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{A}(x)=\int_c^d f(x,t)\mathrm{dt}.$$

En intégrant la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[a,b]$, on a la formule

$$(*)\ :\quad \int_a^b \mathcal{A}(x)\mathrm{dx}=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}.$$

Définition 3.7. *Dans l'expression* $\displaystyle\int_a^b\left[\int_c^d \boldsymbol{f(x, y)}\mathbf{dy}\right]\mathbf{dx}$ *de la formule* $(*)$ *ci-dessus, on dit que l'on a* ***d'abord intégré par rapport à y****, et ensuite par rapport à* x.

De manière analogue, dans l'expression $\displaystyle\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}$*, on dit que l'on intègre* ***d'abord par rapport à x****, puis par rapport à* y.

Exemple 3.8.
Considérons le rectangle $R=[1, 2]\times[0, 3]\subset\mathbb{R}^2$ $(1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 3)$ et la fonction f définie sur R par $f(x,y)=xy+y^2+1$. Ici, $\boldsymbol{a=1, b=2}$, $\boldsymbol{c=0}$ et $\boldsymbol{d=3}$.

- on a $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{dy}=\int_0^3 (xy+y^2+1)\mathrm{dy}=\left[\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+y\right]_{y=0}^{y=3}=\frac{9}{2}x+12$, en intégrant d'abord par rapport à y;
- intégrant maintenant le résultat précédent par rapport à x, on obtient: $$\int_a^b\left[\int_0^3 (xy+y^2+1)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_1^2\left(\frac{9}{2}x+12\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{9}{4}x^2+12x\right]_1^2=33-12-\frac{9}{4}=\frac{75}{4}$$

A présent, commençons par intégrer cette même fonction par rapport à x, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à y:

- on a $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{dx}=\int_1^2 (xy+y^2+1)\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{2}x^2y+(y^2+1)x\right]_{x=1}^{x=2}=y^2+\frac{3}{2}y+1$, en intégrant d'abord par rapport à x;
- en intégrant le résultat ci-dessus par rapport à y, on obtient: $$\int_0^3\left[\int_1^2 (xy+y^2+1)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}=\int_0^3\left(y^2+\frac{3}{2}y+1\right)\mathrm{dy}=\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4}y^2+y\right]_0^3=12+\frac{27}{4}=\frac{75}{4}$$

Dans l'exemple 3.8 nous remarquons que les deux intégrations successives donnent le même résultat. Ceci n'est pas le fait du hasard mais est dû au théorème suivant que nous admettrons.

Théorème 3.9. (Théorème de Fubini pour les rectangles fermés)
Soit $R=[a,b]\times[c,d]$ $(a<b\,,c<d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}}$ ***une fonction continue**, alors f est intégrable sur R et on a:*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{f(x,y)\mathrm{d}y}\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{f(x,y)\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y.$$

Exemple 3.10.
Soit $R=[1,2]\times[0,2]\subset\mathbb{R}^2$ et $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=ye^{xy}$.

Calculons $I=\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

D'après le théorème de Fubini, on a $I=\int_0^2\left[\int_1^2(ye^{xy})\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

Or $\int_1^2(ye^{xy})\mathrm{d}x=\left[e^{xy}\right]_{x=1}^{x=2}=e^{2y}-e^y$.

On en déduit $I=\int_0^2(e^{2y}-e^y)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}e^{2y}-e^y\right]_0^2=\frac{1}{2}e^4-e^2+\frac{1}{2}$.

Note: En intégrant d'abord par rapport à x, le précédent calcul nous a pris juste deux lignes. Si nous commençons par intégrer d'abord par rapport à y, nous nous rendons vite compte que le calcul est moins évident. En effet $\int_0^2(ye^{xy})\mathrm{d}y$ nécessite une intégration par parties.

$\int_0^2(ye^{xy})\mathrm{d}y=\left[\frac{y}{x}e^{xy}-\frac{1}{x^2}e^{xy}\right]_{y=0}^{y=2}=e^{2x}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}$. L'intégration de cette dernière expression nécessite manifestement encore une intégration par parties:

$$\int_1^2\left(e^{2x}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\times 2e^{2x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{2x}\mathrm{d}x+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2.$$

Une intégration par parties donne:

$$\int_1^2\frac{1}{x}\times 2e^{2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{x}\times e^{2x}\right]_1^2-\int_1^2(-\frac{1}{x^2}\times e^{2x})\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\int_1^2\left(e^{2x}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{x}\times e^{2x}\right]_1^2+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}e^4-e^2+\frac{1}{2}.$$

Il faut retenir que dans l'application du Théorème de Fubini,
un choix judicieux de l'ordre d'intégration s'impose.

3.3 Intégrales doubles sur des domaines non rectangles

On considère un domaine borné D du plan réel $\mathbb{R}^2$, f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$ et on voudrait calculer (si elle est définie) l'intégrale $\int\int_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Si le domaine D considéré n'est pas un rectangle mais est borné, nous pouvons l'inclure dans un rectangle R, considérer un quadrillage du rectangle R et définir une somme double de Riemann sur les rectangles du quadrillage qui sont entièrement contenus dans le domaine R. Plus le quadrillage sera fin, mieux D sera approximé par les rectangles du quadrillage contenus dans D. Si la somme double de Riemann tend vers une limite $I \in \mathbb{R}$ lorsque le pas du quadrillage tend vers 0, alors la fonction f est intégrable sur D et on a $\int\int_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = I$.

3.3.1 Intégrales sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites verticales

Théorème 3.11. *Soient* $[a,\ b]$ *(*$a < b$*) un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*,* u *et* v *deux fonctions continues sur* $[a,b]$ *telles que* $\forall x \in [a,b], u(x) \leqslant v(x)$*.*
Soit D *le domaine de* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b,\, u(x) \leqslant y \leqslant v(x)\}$*.*

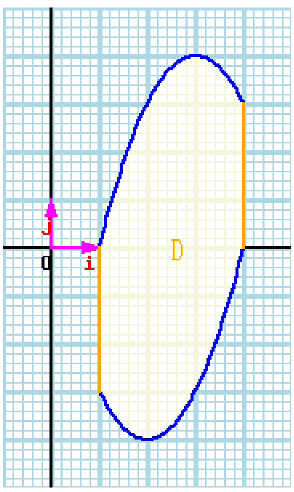
Si $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors* f *est intégrable sur* D *et on a*

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{dy} \right] \mathrm{dx}.$$

Exemple 3.12.
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ compris entre les droites d'équations $x = 1$, $x = 4$ et les deux paraboles d'équations respectives $y = (x-2)^2 - 4$, $y = -(x-3)^2 + 4$. On considère sur D la fonction f définie par $f(x,y) = 3x - 2y + 1$.

Nous allons calculer l'intégrale $I = \int\int_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Posant $u(x) = (x-2)^2 - 4$ et $v(x) = -(x-3)^2 + 4$, on voit facilement que sur l'intervalle $[1,4]$, on a $u(x) \leqslant v(x)$ quel que soit x.

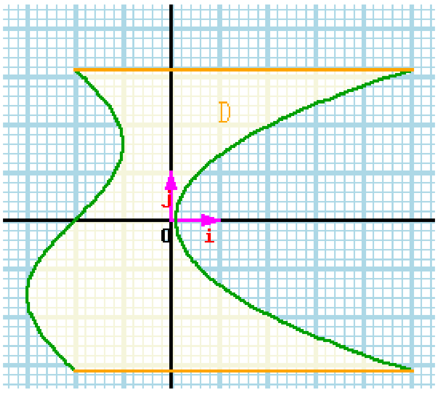


$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leqslant x \leqslant 4,\ u(x) \leqslant y \leqslant v(x)\}$.

Appliquant le théorème 3.11, on obtient:
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_1^4 \left[\int_{x^2-4x}^{-x^2+6x-5} f(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_1^4 \left[(3x+1)y - y^2\right]_{y=u(x)}^{y=v(x)}\mathrm{dx}.$$
On a donc $I = \int_1^4 \big((3x+1)(v(x)-u(x)) - v(x)^2 + u(x)^2\big)\mathrm{dx}$,
$$I = \int_1^4 \big(-2x^3 - 2x^2 + 55x - 30\big)\mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 30x\right]_1^4 = 153.$$

Exercice 3.1. Calculer la surface du domaine D décrit dans l'exemple 3.12

3.3.2 Intégrales sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites horizontales



Les résultats de ce paragraphe se déduisent de ceux du paragraphe précédent en échangeant les rôles de x et y. On considère un intervalle $[c, d]$ $(c < d)$ fermé borné de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues définies sur $[c, d]$ telles que $\forall y \in [c, d]$, $u(y) \leqslant v(y)$.

Soit D le domaine du plan contenu entre les graphes des fonctions u, v et les droites horizontales d'équation respective $y = c$ et $y = d$.

Formellement, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, c \leqslant y \leqslant d,\, u(y) \leqslant x \leqslant v(y)\}$.

Théorème 3.13. *Soit $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est intégrable sur D et on a* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_c^d \left[\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}$.

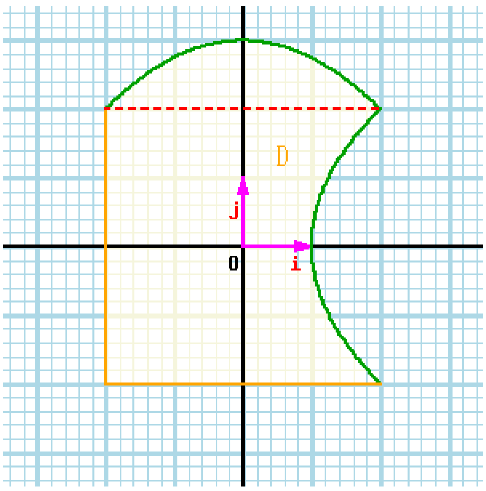
3.3.3 Intégrales doubles sur un domaine D - cas général

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle et ne peut être défini en utilisant les graphes de deux fonctions et deux droites verticales (ou horizontales), on décompose si possible, D en domaines "élémentaires" du type de ceux déjà traités. On utilise ensuite la propriété suivante pour faire le calcul.

PROPRIÉTÉ: Soit D un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On suppose que D est réunion de deux domaines fermés D_1 et D_2 ($D = D_1 \cup D_2$) et que D_1 et D_2 ont une intersection vide, ou contenue dans leur bord (Autrement dit, les intérieurs des deux domaines ne se rencontrent pas).
Dans ce cas, si $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{dxdy} + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{dxdy}.$$

Exemple 3.14.
Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}y^2 + 1 \\ -2 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}x^2 + 3 \end{cases} \right\}$ (voir le dessin ci-dessous).
On considère $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et on veut calculer
$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$. Posons $D_1 = \{(x,y) \in D \,/\, y \geqslant 2\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in D \,/\, y \leqslant 2\}$.
D_1 et D_2 sont des domaines qui sont définis à l'aide de droites verticales ou horizontales et de graphes de fonctions comme dans le paragraphe précédent. L'intersection de D_1 et D_2 est un segment de droite.
On a $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \leqslant x \leqslant 2,\ 2 \leqslant y \leqslant -\dfrac{1}{4}x^2 + 3\}$,
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \leqslant y \leqslant 2,\ -2 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}y^2 + 1\}$.



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{dxdy} + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{dxdy}.$$