Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **- Unité U5 -**
Année 2008/2009

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, D. NGUYEN

FEUILLE TD N°1 - semaine du 2 février 2009

Exercice 1. (révision: calculer un domaine de définition)
Calculer les domaines de définition respectifs des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 données par les formules suivantes:

- $f_1(x) = \ln(2+x) + \sqrt{5-x^2}$, $f_2(x) = \ln(\ln(x))$,
- $f_3(x) = \sqrt{e^{2x}-4}$, $f_4(x) = \sqrt{x^2-100} + \dfrac{100+x}{\ln(100+x)}$.

Exercice 2. (révision: calculer un signe)
Soit T le trinôme de la variable réelle x définie par $T(x) = -x^2+2x+3$.

a) Dresser le tableau des signes de T.

b) Dessiner le graphe de T dans un repère orthonormé du plan.

c) Calculer les domaines de définition respectifs des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 données par les formules suivantes:

- $f_1(x) = \ln(T(x))$, $f_2(x) = \sqrt{T(x)}$, $f_3(x) = \ln(|T(x)|)$, $f_4(x) = \sqrt{\ln(T(x)) - \ln(3)}$.

Exercice 3. (réviser les formules de dérivation)
f et g étant deux fonctions réelles dérivables, lorsque cela a un sens, rappeler les règles de calcul de la dérivée de la somme $(f+g)$, du produit $(f \times g)$, du quotient $\dfrac{f}{g}$, de la composée $f \circ g$.

Exercice 4. (révision: calculer des dérivées de fonctions)
Après avoir déterminé les domaines de définition des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 ci-dessous, calculer leurs dérivées en précisant les domaines de validité des calculs.

- $f_1(x) = e^{5x} + \sqrt{x^4-16}$, $f_2(x) = \sin(x) + x^{\frac{1}{12}}$, $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{\cos(x)-2}$, $f_4(x) = 3^x + \ln(x^2+3)$.

Exercice 5. (Mac-Laurin à l'ordre 1)
Soit $f\colon \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{12}}$.

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Donner une approximation affine de f en $x_0 = 0$.
Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$?

c) Utiliser l'approximation affine de la question précédente pour donner une valeur approchée de $f(\dfrac{5}{100})$.

d) On pose $a=0$ et $b=\dfrac{5}{100}$.
La formule de Mac-Laurin à l'ordre 1 (voir le cours) dit qu'il existe un point $\theta \in \left]0, \dfrac{5}{100}\right[$ tel que

$f(b) = f(0) + f'(0) \times b + \dfrac{f''(\theta)}{2!} \times b^2$.

1. Que peut-on dire du signe de $f''(\theta)$?
2. L'approximation de $f(\dfrac{5}{100})$ donnée en c) est-elle par défaut ou par excès?

e) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{5}{100}\right]$, on a $|f''(x)| \leqslant \frac{11}{144}$. En déduire une majoration de l'erreur commise éventuellement dans l'approximation donnée en c).

Exercice 6. (approximation affine) Un capital de 100 euros est placé à intérêts composés sur un an, à un taux d'intérêt mensuel de $t\%$ (la capitalisation des intérêts est mensuelle).

a) Écrire en fonction de t, la formule donnant le capital au bout de 12 mois.

b) Sachant qu'au bout d'un an les 100 euros ont rapporté 3 euros d'intérêts, utiliser une approximation affine pour estimer le taux d'intérêt mensuel.
