Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **- Unité U5 -**
Année 2008/2009

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, D. NGUYEN

Feuille TD N°2 - semaine du 16 février 2009

Exercice 1. (calculer un polynôme de Taylor)

1. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 en le point $x_0 = 1$ pour la fonction réelle $f_1 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = 1 - 3x + x^2 + 5x^3$.
2. f_2 est une fonction réelle d'une variable réelle, définie au voisinage de $x_0 = -1$ par $f_2(x) = \sqrt{2x+3}$. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de f_2 en -1.
3. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction réelle f_3 définie par $f_3(x) = e^{3x} - \cos(4x)$.

Exercice 2. (domaine, Taylor-Young et calcul du DL d'un produit)

a) Quels sont les domaines de définition des fonctions réelles f, g et h données par les formules suivantes?
$$\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x),\ g(x) = \sqrt{2-x},\ h(x) = f(x) \times g(x).}$$
b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$, pour chacune des fonctions f, g et h ci-dessus.

Exercice 3. (routine de calcul de DL)
Calculer les développements limités suivants:

1. DL à l'ordre 3 en $x_0 = 3$ de la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto \ln(x)}$
2. DL à l'ordre 5 en $x_0 = 0$ de $\boldsymbol{x \longmapsto \dfrac{1}{2+x^2}}$
3. DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ de $\boldsymbol{x \longmapsto e^{\cos(x)}}$.

Exercice 4. (utiliser des DL pour calculer des limites)
Calculer les limites suivantes:

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(2x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\ln(1+x)}$

Exercice 5. (DL, position de tangente)

1. Soit f la fonction définie au voisinage de $x_0 = 1$ par $f(x) = 2^{x^2} - 2^x + x$.
   Un calcul (supposé juste) dit que le DL à l'ordre 2 de f en x_0 est donné par
   $f(x) = 1 + (2\ln(2)+1)(x-1) + \ln(2)(3\ln(2)+2)(x-1)^2 + o((x-1)^2))$.
   Donner une équation de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ et étudier la position du graphe par rapport à cette tangente au voisinage de $(x_0, f(x_0))$.

2. Soit g la fonction définie par la formule $g(x) = e^{-x^2}\sqrt{1-x^4} + \sin^2(x)$.

   a) Quel est le domaine de définition de g?

   b) Un calcul (supposé juste) dit que le DL à l'ordre 4 de g en $x_0 = 0$ est donné par $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.
   Donner une équation de la tangente au graphe de g en $(0, g(0))$ et étudier la position du graphe de g par rapport à cette tangente au voisinage de $(0, g(0))$.

Exercice 6. (étude locale d'une fonction d'une variable réelle)
On considère la fonction $f\colon \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2e^x - \dfrac{\sin(x)+2}{x+1}$.

a) Donner le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

b) Donner une équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$ et étudier la position du graphe de f par rapport à cette tangente, au voisinage de $(0, f(0))$. Faire un dessin qui illustre votre réponse.

Exercice 7. (nature d'un point critique en deux variables)
Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy(3-x-y)$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation $z = f(x,y)$ et le point $(x_0, y_0) = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

1. Calculer $f(x_0, y_0)$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
3. Donner une équation du plan tangent $\mathcal{P}$ à la surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
4. Donner la matrice hessienne de f en (x_0, y_0).
5. Étudier la position du plan tangent $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{S}$ au voisinage de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
