

FEUILLE TD N°4 - semaine du 23 mars 2009

Exercice 1. (savoir utiliser la technique d'intégration par parties)

Calculer les intégrales définies suivantes:

$$\int_1^{27} \sqrt[3]{x} \ln(x) dx, \quad \int_0^\pi \theta(\cos(\theta) + 1) d\theta, \quad \int_0^1 (6t + 100)e^{-3t} dt.$$

Exercice 2. (s'entraîner à la technique de changement de variable)

Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{2x+7}} dx \quad (\text{indication: au choix, poser } u = (2x+7) \text{ ou } x = \frac{t^2-7}{2}),$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{3x+1} dx, \quad I_3 = \int_0^2 \frac{1+x}{4+x^2} dx.$$

Exercice 3. (utiliser la technique appropriée pour calculer)

Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^1 \arctan(x) dx, \quad I_2 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3} dx.$$

Exercice 4. (modéliser) Une entreprise vient d'ouvrir une usine de fabrication de stylos.

On suppose que la production journalière de cette usine est modélisée par la fonction

$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = 4000 \left(1 - \frac{100}{(t+10)^2} \right)$$

où t est le nombre de jours travaillés depuis l'ouverture de l'usine ($f(t)$ étant le nombre de stylos fabriqués par jour). On suppose qu'il y a 250 jours travaillés par an.

- Quelle sera la production journalière à la fin du trentième jour travaillé?
- Quelle est la limite de la production journalière lorsque t tend vers $+\infty$?
- Au total, combien de stylos cette usine aura-t-elle produits au bout de ses 30 premiers jours travaillés? Quelle est la production journalière moyenne sur les 30 premiers jours travaillés?
- Par quelle fonction $g: [0, +\infty[, x \mapsto g(x)$ peut-on modéliser le nombre total de stylos qui auront été fabriqués dans cette usine au bout de x années?

Exercice 5. (étudier une suite d'intégrales définies)

On pose $I_0 = J_0 = \int_1^e \ln(x) dx$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_1^e x^n \ln(x) dx, \quad J_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n} dx.$$

- Calculer I_0 , I_1 , et J_1 .
 - Pour $n \geq 2$, calculer I_n , J_n et dire si les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
-