Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2008/2009

1ère SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 - Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

CORRIGÉ SUCCINCT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES
(*les énoncés sont en bleu*)

Exercice 1. (6 points)

Soit f la fonction réelle définie sur l'intervalle $[-1,2]$ par $f(x)=\left(1+\frac{3x}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1,2]$.

   Solution: On peut commencer par remarquer que l'expression $\left(1+\dfrac{3x}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$ est bien définie si et seulement si $1+\dfrac{3x}{5}\geqslant 0$, c'est-à-dire $x\geqslant -\dfrac{5}{3}$. Comme $-\dfrac{5}{3}<-1$, f est bien définie et dérivable sur $[-1,2]$. On trouve en appliquant les formules de dérivations usuelles, $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{1}{10}\left(1+\dfrac{3x}{5}\right)^{-\frac{5}{6}}}$ et $\boldsymbol{f''(x)=-\dfrac{1}{20}\left(1+\dfrac{3x}{5}\right)^{-\frac{11}{6}}}$. Nous avons $1+\dfrac{3x}{5}>0$ sur l'intervalle $[-1,2]$, ce qui donne $\left(1+\frac{3x}{5}\right)^{-\frac{11}{6}}>0$. On en déduit que $\boldsymbol{f''(x)}$ est strictement négatif sur $[-1,2]$.

2. L'approximation affine de f en $x_0=0$ est une fonction h définie par $h(x)=ax+b$ où a et b sont des nombres réels.

   a) Calculer les nombres réels a et b dans l'expression $h(x)=ax+b$.
   Solution: On a $\boldsymbol{a=f'(0)=\dfrac{1}{10}}$ et $\boldsymbol{b=f(0)=1}$. Ainsi, $h(x)=\dfrac{1}{10}x+1$.

   b) On décide d'utiliser $h(1)$ comme approximation de $f(1)$.

      i. Que vaut $h(1)$?
      Solution: De l'expression $h(x)=\dfrac{1}{10}x+1$ on déduit $\boldsymbol{h(1)=\dfrac{11}{10}=1,10}$.

      ii. Sachant que la formule de Mac-Laurin dit qu'il exite $c\in\,]0,\,1[$ tel que $f(1)=h(1)+\dfrac{f''(c)}{2}$, l'approximation de $f(1)$ par $h(1)$ est-elle par défaut ou par excès? Justifiez votre réponse.
      Solution: Comme on a $\dfrac{f''(c)}{2}<0$, on en déduit que $f(1)<h(1)$, donc l'approximation de $f(1)$ par $h(1)$ est par excès.

Exercice 2. (6 points) Soient f, g et h les fonctions réelles données par les formules $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{1+x}}$, $g(x)=\ln(2-x)$, $h(x)=f(x)\times g(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f, g et h.
   Solution: f a pour domaine $D(f)=]-1,+\infty[$. g a pour domaine $D(g)=]-\infty,2[$. Le domaine de définition de h est l'intersection $D(f)\cap D(g)=]-1,2[$.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en $x_0=0$.
   (indication: on pourra remarquer que $f(x)=8\times(1+x)^{-\frac{1}{2}}$)
   Solution: En utilisant les formules de développements limités des fonctions usuelles on trouve: $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+o(x^2)$.
   On en déduit $\boldsymbol{f(x)=8-4x+3x^2+o(x^2)}$.
3. Des calculs supposés justes donnent $g(0)=\ln(2)$, $g'(0)=-\frac{1}{2}$ et $g''(0)=-\frac{1}{4}$.
   En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $x_0=0$ de g puis de h.
   Solution: en utilisant les données on obtient $\boldsymbol{g(x)=\ln(2)-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)}$. Comme h est la fonction produit de f et g, en utilisant les développements limités à l'ordre 2 de f et g on calcule facilement le développement limité à l'ordre 2 de h. On obtient $\boldsymbol{h(x)=8\ln(2)-4(\ln(2)+1)x+(1+3\ln(2))x^2+o(x^2)}$.
4. Donner une équation de la tangente au graphe de h en $(0,h(0))$ et étudier la position de cette tangente par rapport au graphe au voisinage de $(0,h(0))$.
   Solution: En utilisant le développement limité trouvé dans la question 3. ci-dessus, on trouve que la tangente au graphe de h en $(0,h(0))$ admet pour équation
   $\boldsymbol{y=8\ln(2)-4(\ln(2)+1)x}$.
   Comme on a $(1+3\ln(2))>0$, on peut dire que cette tangente est en dessous du graphe de h au voisinage de $(0,h(0))$.

Exercice 3. (3 points)

1. Calculer le domaine de définition et une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Solution: La fontion $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est défini sur $]0,+\infty[$ et admet pour primitive la fonction $x\mapsto 2\sqrt{x}$.
2. Calculer l'intégrale définie $I=\displaystyle\int_{10}^{1000}\sqrt{\frac{1000}{x}}\mathrm{d}x$.
   Solution: On a $\sqrt{\dfrac{1000}{x}}=\sqrt{1000}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $x\mapsto\sqrt{\dfrac{1000}{x}}$ admet pour primitive $x\mapsto 2\sqrt{1000\,x}$. On en déduit $I=2\Big[\sqrt{1000x}\Big]_{10}^{1000}=2(1000-100)=1800$.

Exercice 4. (5 points)

Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(x)=(10x+5)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. Calculer $\int_0^{10} f(x)\mathrm{dx}$.

   Solution: On fait une intégration par parties en posant $u(x)=10x+5$ et $v'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$, de sorte que $u'(x)=10$ et $v(x)=-2e^{-\frac{1}{2}x}$ (par exemple).

   On en déduit $\int_0^{10} f(x)\mathrm{dx}=\left[-2(10x+5)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{10}+20\int_0^{10} e^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{dx}$.

   D'où finalement $\int_0^{10} f(x)\mathrm{dx}=\left[-2(10x+25)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{10}=50-250e^{-5}$.

2. Pour $b\in[0,+\infty[$ on pose $I(b)=\int_0^b f(x)\mathrm{dx}$.

   Calculer $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$. Que peut-on dire de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$?

   (indication: on pourra utiliser le fait que pour tout réel α strictement négatif et pour tout polynôme P, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha t}\times P(t)=0$).

   Solution: En utilisant les calculs de la question 1. ci-dessus, on trouve que $f(x)$ admet pour primitive la fonction $x\mapsto-2(10x+25)e^{-\frac{1}{2}x}$.

   On en déduit que $I(b)=50-2(10b+25)e^{-\frac{1}{2}b}$. On a $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)=50$, ce qui signifie que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ converge vers 50.
