Monades du Lambda–Calcul

Julianna Zsidó

8 mai 2009

La syntaxe du Lambda–Calcul pur

Les Lambda termes

Soit $X \in \mathsf{Ens}$ l'ensemble de variables. Les termes du Lambda Calcul, $\mathsf{LC}\,X$ sont définis inductivement :

$|$ var : $X \to \mathsf{LC}\,X$

$|$ app : $\mathsf{LC}\,X \times \mathsf{LC}\,X \to \mathsf{LC}\,X$

$|$ abs : $\mathsf{LC}(X+1) \to \mathsf{LC}\,X$

La substitution

subst : $\mathsf{LC}(\mathsf{LC}\,X) \to \mathsf{LC}\,X$

Théorème

LC est l'objet initial dans la catégorie des monades munies de deux morphismes de modules.

Un objet dans cette catégorie est $((R, \eta, \mu), \mathrm{app}, \mathrm{abs})$ avec

$$(R, \eta, \mu) \text{ monade sur Ens}$$

$$\mathrm{app} : R \times R \longrightarrow R$$

$$\mathrm{abs} : R' \longrightarrow R$$

où $R'(X) := R(X + 1)$.

Point de vue anglais

$\mathbb{F}$: catégorie des ensembles finis
$[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$: catégorie des foncteurs $\mathbb{F} \to \mathsf{Ens}$

Notation

On considère sur la catégorie $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$ le foncteur

$$P : Y \mapsto Y^U + Y \times Y$$

où $U := \mathbb{F}(1, -) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, -)$.

$$Y^U(n) = [\mathbb{F}, \mathsf{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times U, X)$$

Point de vue anglais

$\mathbb{F}$: catégorie des ensembles finis
$[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$: catégorie des foncteurs $\mathbb{F} \to \mathsf{Ens}$

Notation

On considère sur la catégorie $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$ le foncteur

$$P : Y \mapsto Y^U + Y \times Y$$

où $U := \mathbb{F}(1, -) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, -)$.

$$\begin{aligned} Y^U(n) &= [\mathbb{F}, \mathsf{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times U, X) \\ &= [\mathbb{F}, \mathsf{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times \mathbb{F}(1, -), X) \end{aligned}$$

$\mathbb{F}$: catégorie des ensembles finis

$[\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$: catégorie des foncteurs $\mathbb{F} \to \mathrm{Ens}$

Notation

On considère sur la catégorie $[\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$ le foncteur

$$P : Y \mapsto Y^U + Y \times Y$$

où $U := \mathbb{F}(1, -) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, -)$.

$$\begin{aligned} Y^U(n) &= [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times U, X) \\ &= [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times \mathbb{F}(1, -), X) \\ &\cong [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n + 1, -), X) \end{aligned}$$

$\mathbb{F}$: catégorie des ensembles finis
$[\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$: catégorie des foncteurs $\mathbb{F} \to \mathrm{Ens}$

Notation

On considère sur la catégorie $[\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$ le foncteur

$$P : Y \mapsto Y^U + Y \times Y$$

où $U := \mathbb{F}(1, -) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, -)$.

$$\begin{aligned} Y^U(n) &= [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times U, X) \\ &= [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n, -) \times \mathbb{F}(1, -), X) \\ &\cong [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](\mathbb{F}(n+1, -), X) \\ &\cong Y(n+1) \end{aligned}$$

Point de vue anglais

$\mathbb{F}$: catégorie des ensembles finis
$[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$: catégorie des foncteurs $\mathbb{F} \to \mathsf{Ens}$

Notation

On considère sur la catégorie $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$ le foncteur

$$P : Y \mapsto Y^U + Y \times Y$$

où $U := \mathbb{F}(1, -) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, -)$.

Notation

Soit $X \in [\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$. On note $P_X : Y \mapsto X + PY$.

Définition

Une algèbre sur un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un couple consistant en un objet A et un morphisme $a : FA \to A$ de $\mathcal{C}$. Un morphisme de F–algèbres $\varphi : (A, a) \to (B, b)$ est une transformation naturelle qui fait commuter le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "a"'] & FB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

Les F–algèbres et les morphismes forment une catégorie F–alg.

Exemple

On considère le foncteur $F : X \mapsto 1 + X$ sur Ens.

Une F–algèbre est un couple (A, a) où $A \in$ Ens et $a : 1 + A \to A$. Donner une flèche $1 + A \to A$ est équivalent à se donner deux flèches $e : 1 \to A$ (i.e. un élément de A) et $f : A \to A$.

Par exemple $\mathbb{N}$ est une F–algèbre car on a $1 + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donné par $[0, \mathrm{succ}]$. On a même $1 + \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$.

Algèbre initiale

Lemme (Lambek)

L'algèbre initiale $a : FA \longrightarrow A$ est un iso.

Preuve.

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "a"'] & FFA \arrow[r, "Fa"] \arrow[d, "Fa"'] & FA \arrow[d, "a"] \\
A \arrow[r, "f"'] & FA \arrow[r, "a"'] & A
\end{tikzcd}$$

La monade associée à P (1)

Adjonction $F \dashv O$

Le foncteur oubli $O : P\text{–alg} \longrightarrow [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$ a un adjoint à gauche :

$$F : X \mapsto \text{ l'algèbre initiale de } P_X$$

On a bien

$$P\text{–alg}(FX, (A, a)) \cong [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}](X, O(A, a))$$

Construction de la P_X–alèbre initiale

On considère le diagramme suivant :

$$0 \to (X + P)(0) \to (X + P)^2(0) \to \dots$$

On note la colimite $C := \mathrm{colim}_n\, P_X^n(0)$.

- On a $c : P_X(C) \to C$ par la propriété universelle de la colimite.
- C est initiale dans P_X–alg par la propriété universelle de la colimite.

La monade associée à P (1)

Définition

On définit T la monade «anglaise» étant la monade induite par l'adjonction $F \dashv O$:

- $T := OF$
- $\eta = \eta : \mathrm{Id} \to OF$ l'unité de l'adjoncion
- $\mu = O\varepsilon F : OFOF \to OF$ où $\varepsilon : FO \to \mathrm{Id}$ désigne la co–unité de l'adjonction

La monade associée à P (2)

Définition

On définit $T : X \mapsto$ l'algèbre initiale de P_X.

On a donc $TX \cong X + P(TX) = X + (TX)^U + TX \times TX$. On note $X + PTX \xrightarrow{[\eta_X, \sigma_X]} TX$.

Lemme

T est une monade.

Preuve. «Tout découle de l'initialité.»

- Fonctorialité : Soit $f : X \to Y$, on définit $Tf : TX \to TY$ par l'initialité de TX. On munit TY d'une structure de P_X–algèbre : $X + PTY \xrightarrow{f+\mathrm{id}} Y + PTY \cong TY$.
- $\eta_X : X \to TX$ par définition.
- On définit $\mu_X : TTX \to TX$ par l'initialité de TTX. On munit TX d'une structure de P_{TX}–algèbre : $TX + PTX \xrightarrow{[\mathrm{id}_{TX}, \sigma_X]} TX$.

Par définition de μ_X on a :

$$\begin{tikzcd}
TX + PTTX \arrow[r, "\mathrm{id} + P\mu_X"] \arrow[d, "{[\eta_{TX}, \sigma_{TX}]}"'] & TX + PTX \arrow[d, "{[\mathrm{id}_{TX}, \sigma_X]}"] \\
TTX \arrow[r, "\mu_X"'] & TX
\end{tikzcd}$$

implique

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[d, "\eta_{TX}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TX}"] & \\
TTX \arrow[r, "\mu_X"'] & TX
\end{tikzcd}$$

Pour vérifier que le triangle

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "T\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TX}"'] & TTX \arrow[d, "\mu_X"] \\ & TX \end{tikzcd}$$

commute pour tout $X \in [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$, il faut vérifier que TTX est une P_X–algèbre et que μ_X est un morphisme de P_X–algèbres. D'après l'initialité de TX on peut déduire que $\mathrm{id}_{TX} = \mu_X \circ T\eta_X$.

Les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} TTTX \arrow[r, "T\mu_X"] \arrow[d, "\mu_{TX}"'] & TTX \arrow[d, "\mu_X"] \\ TTX \arrow[r, "\mu_X"'] & TX \end{tikzcd}$$

par l'initialité de $TTTX$:
TTX et TX sont des P_{TTX}–algèbres et μ_X est un morphisme de P_{TTX}–algèbre.

Le produit monoïdal

Soient $X, Y \in [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$. Le produit monoïdal est donnée par la formule

$$Y \odot X := \mathrm{Lan}_U\, Y \circ X$$

Lan_U désigne l'extension de Kan à gauche de Y

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "Y"'] & \mathrm{Ens} \arrow[d, "\mathrm{Lan}_U\, Y"] \arrow[dl, phantom, "\kappa \Uparrow"] \\
 & \mathrm{Ens}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A = \mathrm{colim}_{n \subseteq A \text{ fini}}\ n \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Lan}_U\, Y"] \\
\mathrm{Lan}_U\, Y(A) = \mathrm{colim}_{n \subseteq A \text{ fini}}\ Y(n)
\end{tikzcd}$$

L'unité

$U = \mathbb{F}(1, -) \in [\mathbb{F}, \mathrm{Ens}]$

Monade forte

Définition

La monade M sur la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est forte si elle est munie d'une transformation naturelle

$$t_{X,Y} : MY \otimes X \to M(X \otimes Y)$$

pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$.

Lemme

La monade T est forte.

Monoïde

Lemme

TU est un monoïde sur $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$.

Preuve. On construit $TU \odot TU \to TU$ en utilisant la force :

$$TU \odot TU \xrightarrow{t_{U,TU}} T(U \odot TU) \cong TTU \xrightarrow{\mu_U} TU$$

L'unité est donné par η_U :

$$U \to TU$$

Les axiomes sont satisfaits.

Les catégories $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$ et $[\mathsf{Ens}, \mathsf{Ens}]_f$

$[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$: la catégorie de foncteurs $\mathbb{F} \longrightarrow \mathsf{Ens}$
$[\mathsf{Ens}, \mathsf{Ens}]_f$: la catégorie de foncteurs $\mathsf{Ens} \longrightarrow \mathsf{Ens}$ finitaires (i.e. préservant les colimites filtrantes)
Chaque ensemble X est la colimite filtrante de ses sous–ensembles finis :

$$X = \mathrm{colim}_{n \subseteq X \text{ fini}}$$

Donc un $F \in [\mathsf{Ens}, \mathsf{Ens}]_f$ est détérminé par sa restriction sur $\mathbb{F}$:

$$FX = F(\mathrm{colim}_{n \subseteq X \text{ fini}}\ n) \cong \mathrm{colim}_{n \subseteq X \text{ fini}}\ F(n)$$

Passage $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}] \rightsquigarrow [\mathsf{Ens}, \mathsf{Ens}]_f$

Il s'effectue par l'extension de Kan à gauche :

$$Y \odot X \quad \rightsquigarrow \quad \widehat{Y} \circ \widehat{X}$$

$$U \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Id}$$

où $\widehat{Y} := \mathrm{Lan}_U\, Y$ et $\widehat{X} := \mathrm{Lan}_U\, X$. On pose

$$\mathrm{LC} := \widehat{TU}$$

et on trouve

$$TU \odot TU \to TU \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{LC} \circ \mathrm{LC} \to \mathrm{LC}$$

$$U \to TU \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Id} \to \mathrm{LC}$$

Morphismes de modules

La monade «niçoise» du Lambda–Calcul pur est munie de deux morphismes de LC–modules :

$$\mathsf{LC} \times \mathsf{LC} \to \mathsf{LC}$$

$$\mathsf{LC}' \to \mathsf{LC}$$

On peut déduire ces morphismes également du foncteur P et de la monade associée T sur $[\mathbb{F}, \mathsf{Ens}]$.

Travaux en cours

- déduire la propriété universelle de LC
- direction inverse : passage de la monade «niçoise» à la monade T ou au foncteur P