

# Le théorème de Church–Rosser

Julianna Zsidó

14 mars 2008

## Alonzo Church et J. Barkley Rosser



(\*1903 †1995)



(\*1907 †1989)

## Plan de l'exposé

- 1 Généralités
  - Les lambda-termes
  - La substitution
  - $\alpha$ -équivalence
  - La  $\beta$ -réduction
- 2 Le théorème de Church–Rosser et sa preuve
  - Lemme 1–3
  - Lemme de la bande
  - Preuve du théorème
  - Corollaire 1 et 2

## Définition lambda-termes

Soit  $V$  un ensemble. (On appelle  $V$  l'ensemble des variables.)

L'ensemble des lambda-termes  $LC$  est défini inductivement :

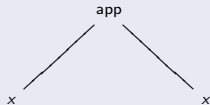
- $v \in LC$  pour  $v \in V$
- $(MN) \in LC$  pour  $M, N \in LC$
- $\lambda v.M \in LC$  pour  $v \in V$  et  $M \in LC$

## Exemples lambda-termes

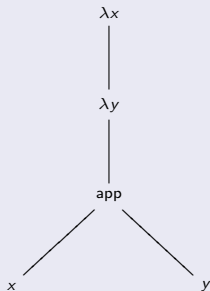
Soit  $V = \{x, y\}$ . Exemples :  $x$ ,  $(xx)$ ,  $\lambda x.x =: I$ ,  $\lambda x.(xx) =: \Delta$ ,  
 $\lambda xy.xy = \lambda x.\lambda y.(xy)$ ,  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) = (\Delta\Delta)$ ,  
 $\lambda xy.xyx = \lambda x.\lambda y.((xy)x)$

## représentation arborescente

- $(xx)$

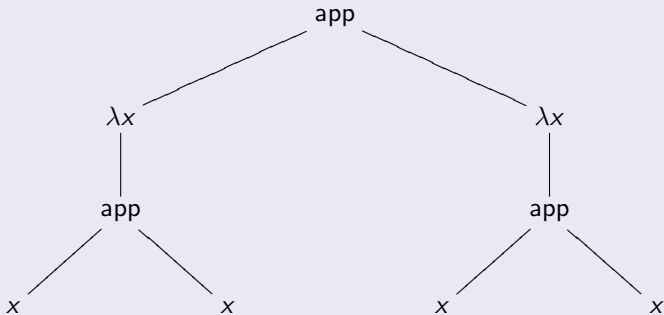


- $\lambda xy.xy$



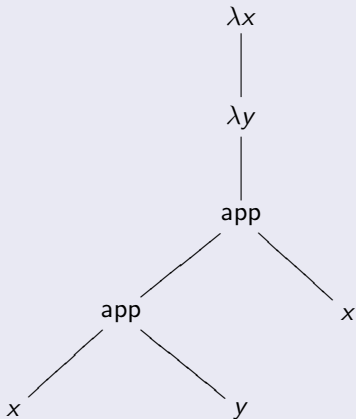
## représentation arborescente

- $\Delta\Delta$



## représentation arborescente

- $\lambda xy. xyx$



## Entiers de Church

- $0 := \lambda fx.x$
- $1 := \lambda fx.fx$
- $2 := \lambda fx.f(fx)$
- $n := \lambda fx.f^n x$  où  $f^n$  désigne  $f(f(\dots))$  (application  $n$  fois)

## Opérations

- addition  $+$   $:= \lambda mnfx.mf(nfx)$
- multiplication  $*$   $:= \lambda mnf.n(mf)$
- puissance  $(m^n)$   $\text{puiss} := \lambda mn.nm$
- successeur  $\text{succ} := \lambda nfx.f(nfx)$
- prédécesseur  $\text{pred} := \lambda nfx.n(\lambda gh.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda u.u)$

## Définition variables libres

Soit  $T \in LC$ . L'ensemble des variables libres de  $T$ ,  $FV(T) \subset V$ , est défini récursivement :

$$FV(T) := \begin{cases} \{v\} & \text{si } T = v \\ FV(M) \cup FV(N) & \text{si } T = (MN) \\ FV(M) \setminus \{v\} & \text{si } T = \lambda v.M \end{cases}$$

## Exemples

$FV(\lambda xy.xy) = \emptyset$ ,  $FV(\lambda x.xy) = \{y\}$ ,  $FV(\lambda xy.x) = \emptyset$ ,  
 $FV((\lambda x.x)x) = \{x\}$

## Variables liées

Les variables d'un terme  $M$  qui n'appartiennent pas à  $FV(M)$  sont des variables liées.

## Définition récursive de la substitution

$$T[x := N] := \begin{cases} N & \text{si } T = x \\ y & \text{si } T = y (\neq x) \\ (M_1[x := N])(M_2[x := N]) & \text{si } T = (M_1 M_2) \\ \lambda x.M & \text{si } T = \lambda x.M \\ \lambda y.(M[x := N]) & \text{si } T = \lambda y.M \text{ et } y \notin \text{FV}(N) \end{cases}$$

## Exemples

$$\begin{aligned} \lambda xy.z(xy)[z := \lambda t.tv] &= \lambda xy.(\lambda t.tv)(xy) \\ (\lambda x.yx)(\lambda z.z)[y := \lambda v.(vt)] &= (\lambda x.(\lambda v.(vt))x)(\lambda z.z) \\ (\lambda x.x)x[x := (yz)] &= (\lambda x.x)(yz) \end{aligned}$$

## Définition $\alpha$ -équivalence

Renommage des variables liées : on remplace  $\lambda x.M$  par  $\lambda y.(M[x := y])$ . C'est une relation d'équivalence.

## Exemples

$$\lambda x.x =_{\alpha} \lambda y.y$$

$$(\lambda y.xy)x =_{\alpha} (\lambda z.xz)x$$

$$(\lambda x.x)x =_{\alpha} (\lambda y.y)x$$

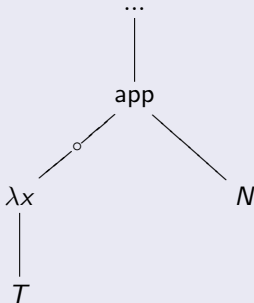
## Contre-exemples

$$\lambda x.xy \neq_{\alpha} \lambda x.xz$$

$$(\lambda x.x)x \neq_{\alpha} (\lambda x.x)y$$

## Définition $\beta$ -redex

On appelle tout sous-terme de la forme  $(\lambda x. T)N$  un  $\beta$ -redex.



## Définition $\beta$ -réduction

Un lambda-terme contenant un  $\beta$ -redex  $(\lambda x. T)N$  se réduit en remplaçant le redex par  $T[x := N]$ .

## Exemples

$$\begin{aligned}\lambda xy. z(xy)[z := \lambda t. tv] &= \lambda xy. (\lambda t. tv)(xy) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda xy. (xy)v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda x. yx)(\lambda z. z)[y := \lambda v. (vt)] &= (\lambda x. (\lambda v. (vt))x)(\lambda z. z) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x. (xt))(\lambda z. z) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z. z)t \\ &\rightarrow_{\beta} t\end{aligned}$$

## Exemples

$$I I = (\lambda x.x)(\lambda y.y) \rightarrow_{\beta} \lambda y.y = I$$

$$\Delta I = (\lambda x.xx)(\lambda y.y) \rightarrow_{\beta} (\lambda y.y)(\lambda y.y) \rightarrow_{\beta} \lambda y.y = I$$

$$I \Delta = (\lambda y.y)(\lambda x.xx) \rightarrow_{\beta} \lambda x.xx = \Delta$$

$$\Delta \Delta = (\lambda x.xx)(\lambda y.yy) \rightarrow_{\beta} (\lambda y.yy)(\lambda y.yy) = \Delta \Delta$$

## Calculs avec les entiers de Church

$$\begin{aligned} +21 &= (\lambda mnfx.mf(nfx))(\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.fx) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.((\lambda fx.f(fx))f((\lambda fx.fx)fx)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.((\lambda fx.f(fx))f(fx)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.(f(f(fx))) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *32 &= (\lambda mnf.n(mf))(\lambda fx.f(f(fx)))(\lambda fx.f(fx)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda f.((\lambda fx.f(fx))((\lambda fx.f(f(fx))))f) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda f.((\lambda fx.f(fx))(\lambda x.f(f(fx)))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda f.(\lambda x.(\lambda x.f(f(fx))((\lambda x.f(f(fx))))x)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda f.(\lambda x.(\lambda x.f(f(fx))(f(f(fx)))))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.(f(f(f(f(f(fx)))))) = 6 \end{aligned}$$

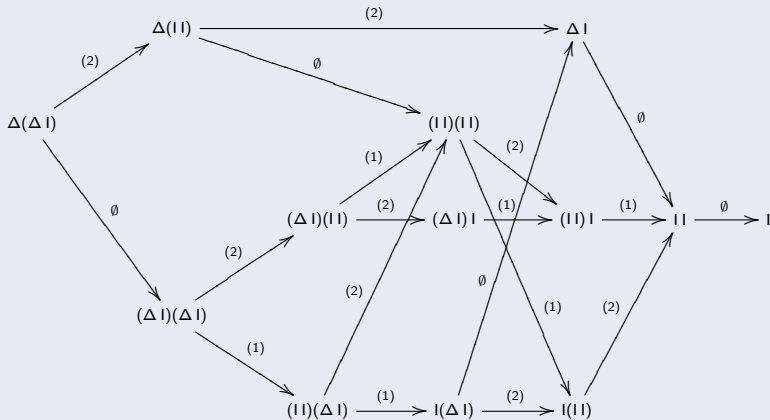
## Calculs avec les entiers de Church

$$\begin{aligned}\text{pred } 0 &= (\lambda nfx.n(\lambda gh.h(gf)))(\lambda u.x)(\lambda v.v))(\lambda fx.x) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.(\lambda fx.x)(\lambda gh.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda v.v) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda fx.((\lambda u.x)(\lambda v.v)) \rightarrow_{\beta} \lambda fx.x = 0\end{aligned}$$

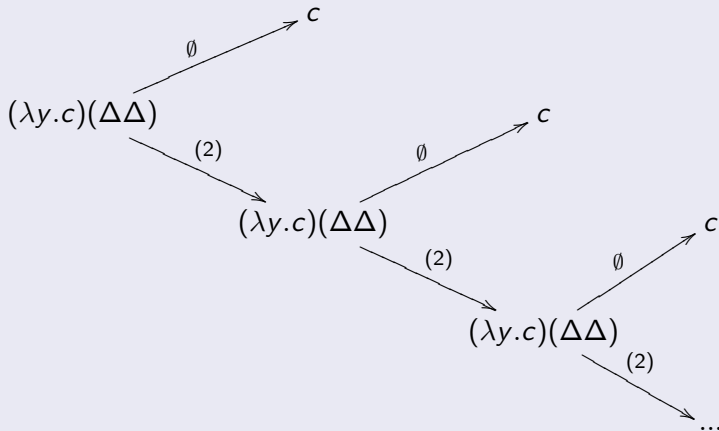
$$\begin{aligned}\text{puiss } 22 &= (\lambda mn.nm)(\lambda gx.g(gx))(\lambda fy.f(fy)) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda fy.f(fy))(\lambda gx.g(gx)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.((\lambda gx.g(gx))((\lambda gx.g(gx))y)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.((\lambda gz.g(gz))(\lambda x.y(yx))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.(\lambda z.((\lambda x.y(yx))((\lambda x.y(yx))z))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda yz.((\lambda x.y(yx))(y(yz))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda yz.(y(y(y(yz)))) = 4\end{aligned}$$

# La $\beta$ -réduction

## Exemple



## Exemple



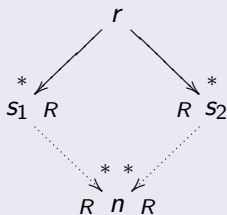
# Théorème de Church–Rosser

## Théorème de Church–Rosser

La  $\beta$ -réduction est confluente.

## Définition confluence (diamond property)

Soit  $E$  un ensemble et  $R \subset E \times E$  une relation sur  $E$ . Si on note  $r \rightarrow_R s$  un couple  $(r, s) \in R$  et la clôture transitive et réflexive de  $\rightarrow_R$  par  $\rightarrow_R^*$ , alors on dit que  $R$  est confluente ssi le losange suivant commute pour tout  $r \in E$  :



## Les lambda-termes soulignés

- $v \in \underline{LC}$  pour  $v \in V$
- $(MN) \in \underline{LC}$  pour  $M, N \in \underline{LC}$
- $\lambda v.M \in \underline{LC}$  pour  $v \in V$  et  $M \in \underline{LC}$
- $(\underline{\lambda}v.M)N \in \underline{LC}$  pour  $v \in V$  et  $M, N \in \underline{LC}$

## La $\underline{\beta}$ -réduction

$$(\lambda v.M)N \rightarrow_{\underline{\beta}} M[v := N]$$

$$(\underline{\lambda}v.M)N \rightarrow_{\underline{\beta}} M[v := N]$$

## Définition $\varphi$

On définit la fonction  $\varphi : \underline{\text{LC}} \rightarrow \text{LC}$  récursivement :

$$\varphi(T) := \begin{cases} v & \text{si } T = v \\ (\varphi(M)\varphi(N)) & \text{si } T = (MN) \\ \lambda v.(\varphi(M)) & \text{si } T = \lambda v.M \\ \varphi(M)[v := \varphi(N)] & \text{si } T = (\underline{\lambda}v.M)N \end{cases}$$

## Notation

$\varphi(M) = N$  est noté  $M \xrightarrow{\varphi} N$ .

## Définition $|\cdot|$

On définit la fonction  $|\cdot| : \underline{LC} \rightarrow LC$  récursivement :

$$|T| := \begin{cases} v & \text{si } T = v \\ (|M||N|) & \text{si } T = (MN) \\ \lambda v. |M| & \text{si } T = \lambda v. M \\ (\lambda v. |M|)|N| & \text{si } T = (\underline{\lambda} v. M)N \end{cases}$$

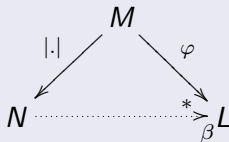
## Notation

$|M| = N$  est noté  $M \xrightarrow{|\cdot|} N$ .

# Preuve du théorème de Church–Rosser

## Lemme 1

Pour tout  $M \in \underline{LC}$  on a



## Preuve du lemme 1

par induction structurelle

## Lemme 2

Pour tout  $M' \in \underline{LC}$  et  $M, N \in LC$  on a :

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\beta^*} & N' \\ \downarrow |\cdot| & & \downarrow |\cdot| \\ M & \xrightarrow{\beta^*} & N \end{array}$$

## Preuve du lemme 2

On suppose d'abord que  $M \rightarrow_{\beta} N$ , donc on obtient  $N$  en réduisant un redex dans  $M$ . On obtient  $N'$  en réduisant le redex correspondant dans  $M'$ . L'énoncé général se déduit de la transitivité. □

## Lemme 3

- 1 Pour tout  $M, N \in \underline{\text{LC}}$  on a  
 $\varphi(M[x := N]) = \varphi(M)[x := \varphi(N)]$ .
- 2 Pour tout  $M, T \in \underline{\text{LC}}$  on a

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & T \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varphi(M) & \xrightarrow[\beta]{*} & \varphi(T) \end{array}$$

## Preuve du lemme 3

- 1 par induction structurelle :
  - $M = x$

$$\varphi(x[x := N]) = \varphi(N) = x[x := \varphi(N)] = \varphi(x)[x := \varphi(N)]$$

## Preuve du lemme 3

1

- $M = y \neq x$

$$\varphi(y[x := N]) = \varphi(y) = y = y[x := \varphi(N)] = \varphi(y)[x := \varphi(N)]$$

- $M = (PQ)$

$$\begin{aligned}\varphi(PQ[x := N]) &= \varphi((P[x := N])(Q[x := N])) \\ &= \varphi(P[x := N])\varphi(Q[x := N]) \\ &= (\varphi(P)[x := \varphi(N)])(\varphi(Q)[x := \varphi(N)]) \\ &= (\varphi(P)\varphi(Q))[x := \varphi(N)] \\ &= \varphi(PQ)[x := \varphi(N)]\end{aligned}$$

## Preuve du lemme 3

1

- $M = \lambda y.P$

$$\begin{aligned}\varphi((\lambda y.P)[x := N]) &= \varphi(\lambda y.(P[x := N])) \\ &= \lambda y.\varphi(P[x := N]) \\ &= \lambda y.(\varphi(P)[x := \varphi(N)]) \\ &= (\lambda y.\varphi(P))[x := \varphi(N)] \\ &= \varphi(\lambda y.P)[x := \varphi(N)]\end{aligned}$$

## Lemme de substitution

$$M[x := N][y := P] = M[y := P][x := N[y := P]]$$

pour  $x \notin FV(P)$ .

## Preuve du lemme

par induction structurelle

## Preuve du lemme 3

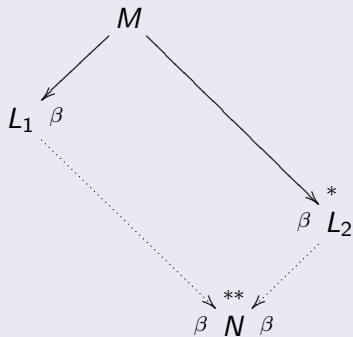
①

- $M = (\lambda y.P)Q$

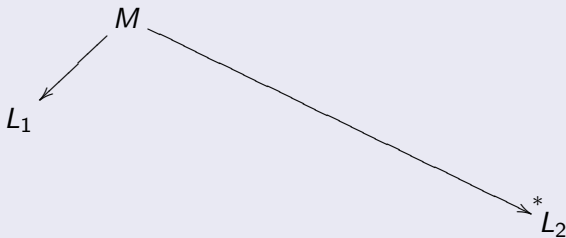
$$\begin{aligned}\varphi(((\lambda y.P)Q)[x := N]) &= \varphi((\lambda y.(P[x := N]))(Q[x := N])) \\ &= \varphi(P[x := N])[y := \varphi(Q[x := N])] \\ &= \varphi(P)[x := \varphi(N)][y := \varphi(Q)[x := \varphi(N)]] \\ &= \varphi(P)[y := \varphi(Q)][x := \varphi(N)] \\ &= \varphi((\lambda y.P)Q)[x := \varphi(N)]\end{aligned}$$

- ② On suppose d'abord que  $M \rightarrow_{\beta} T$ , donc on obtient  $T$  en réduisant un  $\beta$ -redex dans  $M$ . Le terme  $T$  est donc de la forme  $M[x := N]$ . Le point (1) implique l'énoncé dans ce cas. L'énoncé général se déduit de la transitivité.  $\square$

## Lemme de la bande

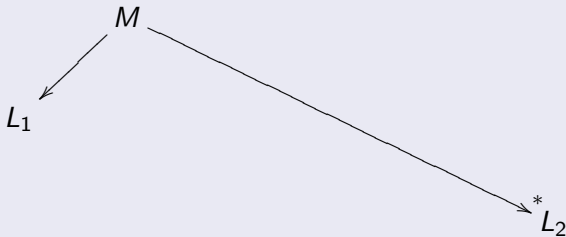


## Preuve du lemme de la bande

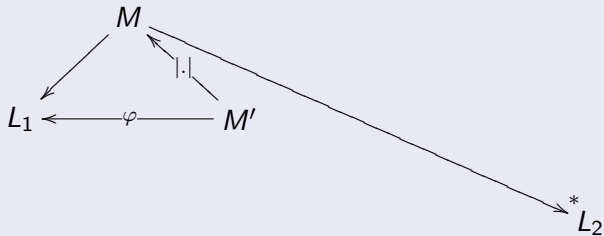


## Preuve du lemme de la bande

On pose  $M'$  qui convient et par sa définition on a :



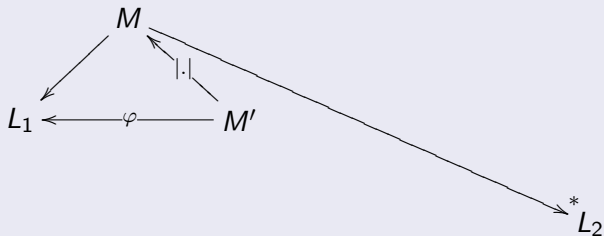
## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

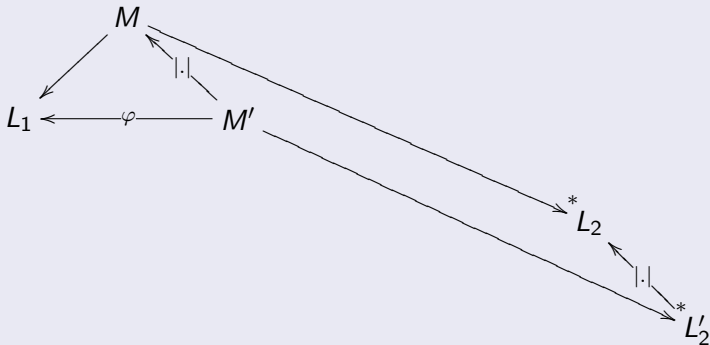
## Preuve du lemme de la bande

Par le lemme 2 on peut compléter :



# Preuve du théorème de Church–Rosser

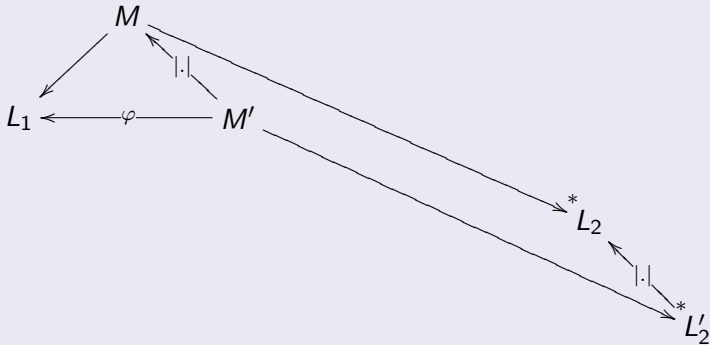
## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

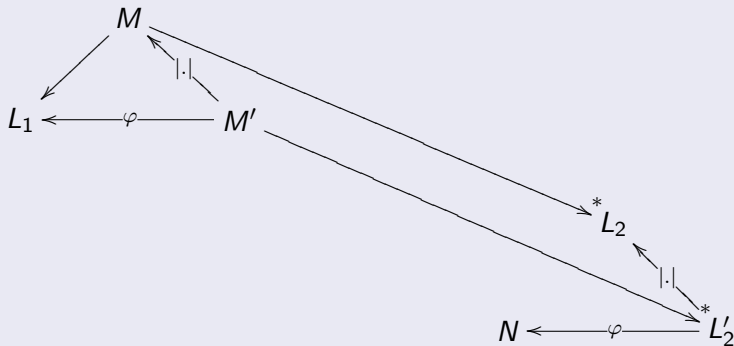
## Preuve du lemme de la bande

On pose  $N$  qui convient et on a :



# Preuve du théorème de Church–Rosser

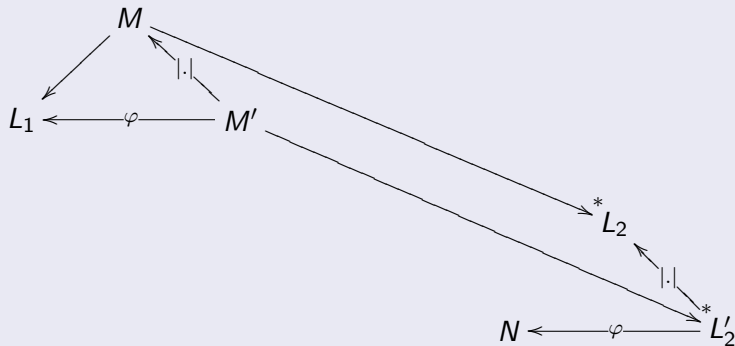
## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

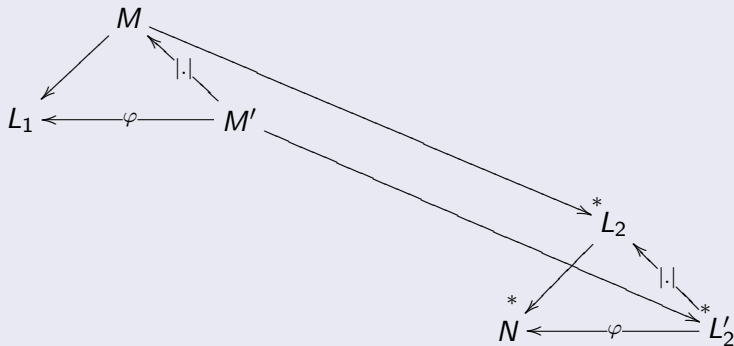
## Preuve du lemme de la bande

Par le lemme 1 on peut compléter :



# Preuve du théorème de Church–Rosser

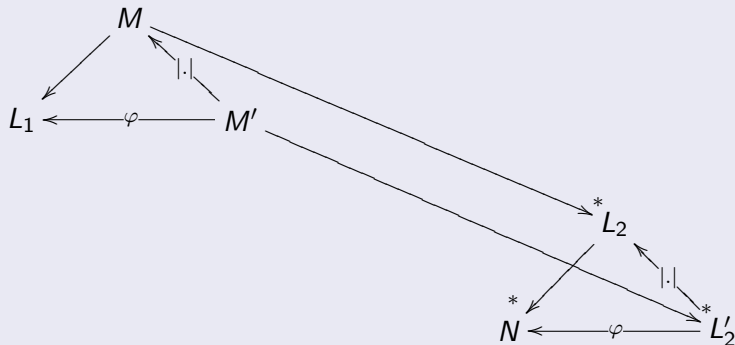
## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

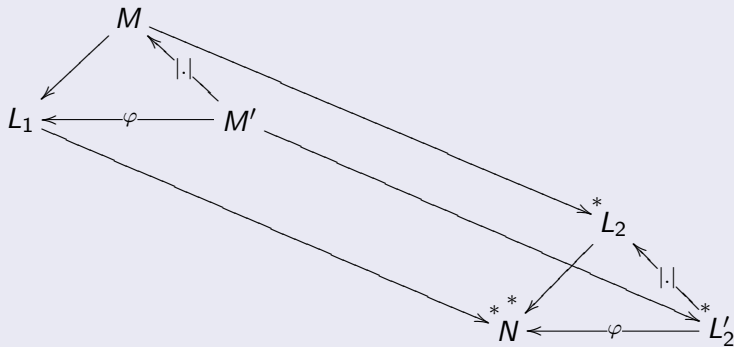
## Preuve du lemme de la bande

Par le lemme 3 on peut compléter :



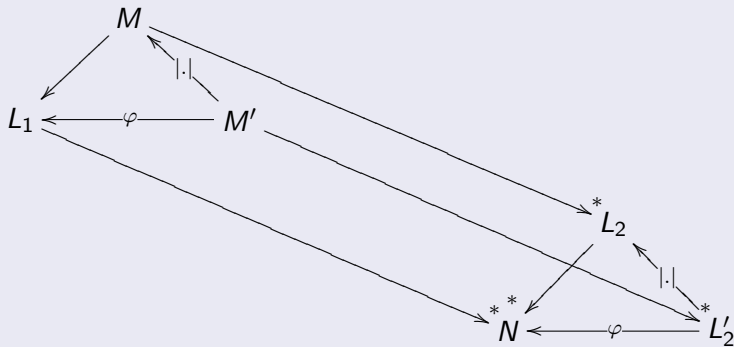
# Preuve du théorème de Church–Rosser

## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

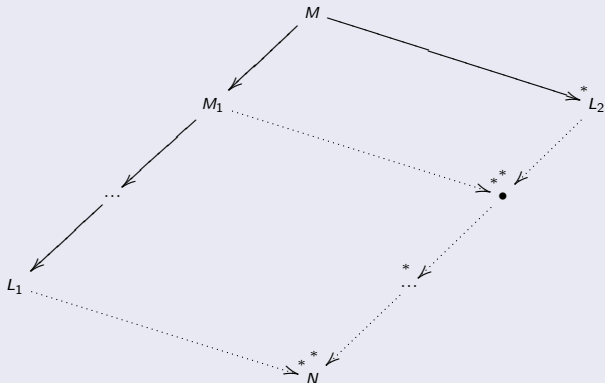
## Preuve du lemme de la bande



# Preuve du théorème de Church–Rosser

## Preuve du théorème de Church–Rosser

Si  $M \rightarrow_{\beta}^* L_1$  alors il existent des termes  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) t.q.  
 $M \rightarrow_{\beta} M_1 \rightarrow_{\beta} \dots \rightarrow_{\beta} M_n \rightarrow_{\beta} L_1$  et on applique le lemme de la bande :



## Définition forme $\beta$ -normale

On appelle forme  $\beta$ -normale un lambda-terme qui ne contient pas de  $\beta$ -redex. On appelle forme normale d'un terme  $M$  tout terme  $N$  qui est une forme  $\beta$ -normale et tel que  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ .

## Corollaire 1

Unicité de la forme normale. (Si elle existe.)

## Preuve corollaire 1

trivial

## Définition $\beta$ -équivalence

La relation d'équivalence engendrée par la  $\beta$ -réduction, notée  $=_\beta$ , est appelée  $\beta$ -équivalence. Plus précisément :

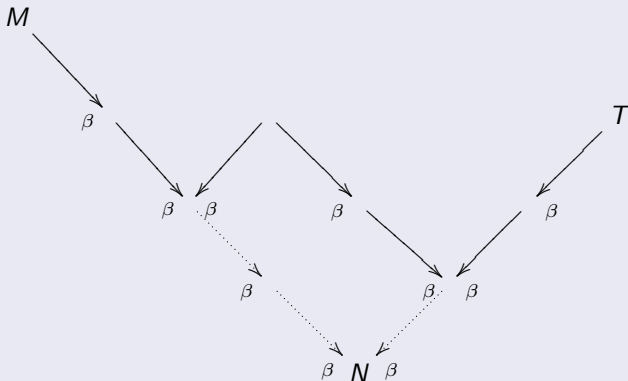
- $M \rightarrow_\beta N \Rightarrow M =_\beta N$
- $M =_\beta M$
- $M =_\beta N \Rightarrow N =_\beta M$
- $M =_\beta N$  et  $N =_\beta T \Rightarrow M =_\beta T$
- $M =_\beta N \Rightarrow (TM) =_\beta (TN)$
- $M =_\beta N \Rightarrow (MT) =_\beta (NT)$
- $M =_\beta N \Rightarrow \lambda x.M =_\beta \lambda x.N$

# Théorème de Church–Rosser

## Corollaire 2

$M =_{\beta} T \Rightarrow \exists N$  t.q.  $M \rightarrow_{\beta}^* N$  et  $T \rightarrow_{\beta}^* N$ .

## Preuve corollaire 2



Fin

Fin

THE END