La théorie de Hodge, et quelques applications

Arnaud Beauville

Université de Nice

Bordeaux, 1er Octobre 2009

Un peu d'histoire

- Hodge, 1941: *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*
- Développement autour de 1950: Kodaira (thèse 1949), Weil, de Rham, Igusa, ...
- en retrait dans la "période Grothendieck": 1956-1968
- Renouveau vers 1968:

  Griffiths (*Periods of integrals on algebraic manifolds*),

  Deligne (*Théorie de Hodge* I, II, III).

puis Clemens-Griffiths (1971), Shafarevich – Piatetski-Shapiro, etc.

Cohomologie entière

M variété compacte orientée, de dimension m.

$\rightsquigarrow$ $H^*(M,\mathbb{Z})$: algèbre graduée de rang fini, anti-commutative

$$\Big(\beta\cdot\alpha=(-1)^{ab}\alpha\cdot\beta \text{ si } \alpha\in H^a(M,\mathbb{Z}),\beta\in H^b(M,\mathbb{Z})\Big)$$

- $H^p(M,\mathbb{Z})=0$ pour $p\notin[0,m]$, $H^0(M,\mathbb{Z})=H^m(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.
- La forme $H^p(M,\mathbb{Z})\otimes H^{m-p}(M,\mathbb{Z})\longrightarrow H^m(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$

  est non dégénéré (dualité de Poincaré).
- Fonctorialité: $f:M\to N \rightsquigarrow$ homomorphisme d'algèbres

$$f^*:H^*(N,\mathbb{Z})\to H^*(M,\mathbb{Z})\ .$$

- $H^*(M,\mathbb{C}):=H^*(M,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ se calcule en termes de formes différentielles.

Cohomologie de de Rham

Espace $\Omega^p(M)$ des p-formes (différentielles). $\omega \in \Omega^p(M)$:

$q \in M \mapsto \omega(q) =$ p-forme multilinéaire alternée sur $T_q(M)$.

Localement: $\omega = \sum f(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$.

Différentielle $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$

$$d(f dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$$

$d \circ d = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} d$ (= *formes exactes*) $\subset \operatorname{Ker} d$ (= *formes fermées*).

Théorème (de Rham)

Isomorphisme d'algèbres $H^*(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$.

(structure d'algèbre sur $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$: produit extérieur)

Variétés complexes

M variété complexe: coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$, changements de coordonnées holomorphes. $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 2n$.

Coordonnées réelles $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ si $z_k = x_k + iy_k$.

On écrit $dz_k = dx_k + idy_k$, $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$ $\rightsquigarrow$

Alors $\Omega^r(M) = \displaystyle\bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$, où $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ si localement

$$\omega = \sum f(z) dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q} \ .$$

Pas compatible avec d: $d\Omega^{p,q}(M) \subset \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$.

On pose $H^{p,q}(M) := \{[\omega] \in H^*(M, \mathbb{C}) \mid \omega \in \Omega^{p,q}(M)\ ,\ d\omega = 0\}$

On a $$H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}\ .$$

Théorème de Hodge

M variété complexe *projective*

$= $ sous-variété fermée de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

$= $ sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ définie par des polynômes homogènes

Théorème de Hodge

$$H^r(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M)$$

Deux démonstrations:

- Analyse: formes harmoniques (Hodge, de Rham)
- Algèbre: calcul en caractéristique p (Deligne-Illusie, 1987)

Remarques

1. $\alpha \in H^{p,q}\,,\ \beta \in H^{p',q'} \ \Rightarrow\ \alpha \cdot \beta \in H^{p+p',q+q'}$.
2. $f : M \to N$ holomorphe $\ \Rightarrow\ f^*(H^{p,q}(N)) \subset H^{p,q}(M)$.
3. Hodge $\ \Rightarrow\ $ les formes *holomorphes* sont fermées

   $\Rightarrow\ H^{r,0} \xrightarrow{\sim} \Omega^r_{\mathrm{hol}}(M)$.
4. Vrai plus généralement pour les variétés *kählériennes*.

Structures de Hodge

Définitions

- Structure de Hodge de poids r $:=$ $\mathbb{Z}$-module de type fini H +

$$H \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q} \qquad \text{avec} \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}\ .$$

- Polarisation: forme $b : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ $(-1)^r$-symétrique, t. q. $h(\alpha,\beta) := i^r b(\alpha,\bar\beta)$ hermitienne, de signe constant sur $H^{p,q}$, et décomposition $H \otimes \mathbb{C} = \oplus\, H^{p,q}$ orthogonale pour h.

Exemple

M variété projective de dimension n: $H^n(M,\mathbb{Z})$ a une structure de Hodge de poids n, + polarisation donnée par le produit

$$H^n(M,\mathbb{Z}) \otimes H^n(M,\mathbb{Z}) \to H^{2n}(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\ .$$

Commentaires

- En fait il faut prendre la cohomologie primitive, voir plus loin; même chose pour $H^p(M, \mathbb{Z})$ quel que soit p.
- Une structure de Hodge est une donnée d'algèbre linéaire.
- Famille $(X_s)_{s \in S}$ de variétés projectives: par exemple

  $S = \{$polynômes homogènes $P \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_3]$ de degré $4\}$

  $X_P =$ surface de $\mathbb{P}^3$ définie par $P = 0$ (supposée non-singulière).

  Alors :

  - $H^*(X_s, \mathbb{Z})$ essentiellement indépendant de s (théorème d'Ehresmann);
  - La structure de Hodge dépend crucialement de s.

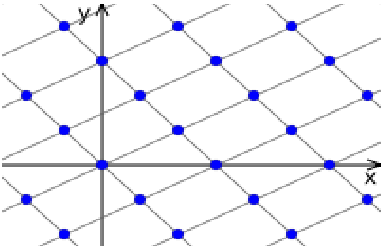
En fait, on va voir que la structure de Hodge permet souvent de retrouver la variété X_s.

$$H \subset H_{\mathbb{C}} = V \oplus \bar{V}$$

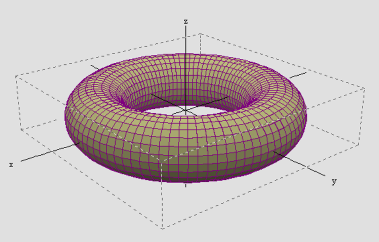
Lemme (facile!)

La projection $H \to V$ est injective, et l'image est un *réseau* dans V.

(c'est à dire : une base de H est une base de V sur $\mathbb{R}$.)



$\rightsquigarrow$ Le quotient $T := V/H$ est un *tore complexe*.



Proposition

Équivalence de catégories: $\{$*SH de poids 1*$\} \leftrightarrow \{$*Tores complexes*$\}$

Autre sens: $T = V/H$ détermine $H \subset V$ $\big(H = \pi_1(T),\ V = \widetilde{T}\big)$.

On pose $H^{0,1} := \mathrm{Ker}\big(H \otimes \mathbb{C} \to V\big)$, $H^{1,0} := \overline{H^{0,1}}$.

Polarisation

Polarisation $\rightsquigarrow$ forme hermitienne h positive sur V

$h(x,y) = s(x,y) + ib(x,y)$, où $b : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ (alternée).

Supposons b unimodulaire: $\exists$ base symplectique $(h_1, \ldots, h_{2g})$ de H

dans laquelle $\mathrm{Mat}(b) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme (facile aussi)

$(h_1, \ldots, h_g)$ est une base de V sur $\mathbb{C}$.

Donc: $\exists\ \tau = (\tau_{ij}) \in M_g(\mathbb{C})$ t.q. $h_{g+i} = \sum_{j=1}^{g} \tau_{ij} h_j$.

Choix de la base symplectique $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}^g$, $H = \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$.

Relations bilinéaires de Riemann

La matrice τ est symétrique, et $\operatorname{Im}\tau$ est définie positive.

Le diviseur Θ

i.e: la matrice des périodes τ appartient au demi-espace de Siegel

$$\mathbb{H}_g := \{A \in M_g(\mathbb{C}) \mid A = {}^tA \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(A) > 0\} \ .$$

Définition : la fonction θ de Riemann

$$\theta(z,\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i({}^tm\,\tau\,m + 2\,{}^tm\,z) \qquad z \in \mathbb{C}^g \ , \ \tau \in \mathbb{H}_g$$

Elle est quasi-périodique par rapport à $H = \mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g$:

$$\theta(z + p + \tau q) = \theta(z)\exp -\pi i({}^tq\,\tau q + 2{}^tq\,z) \qquad p, q \in \mathbb{Z}^g \ ,$$

donc $\theta = 0$ définit une hypersurface Θ dans T, le diviseur thêta, bien défini à translation près (et indépendant du choix de la base).

Proposition

$\{$*SH de poids 1 polarisées*$\}$ $\leftrightarrow$ $\{$*Tores polarisés* $(T, \Theta)\}$

L'espace des modules

$\{H$ poids 1 polarisée + base sympl. de $H\} \;\leftrightarrow\; \tau \in \mathbb{H}_g$

Changement de base $\rightsquigarrow$ action de $Sp(2g,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}_g$:

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ agit par $\tau \mapsto M\cdot\tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$.

Proposition'

$$\{SH \text{ poids 1 polarisées}\} \;\leftrightarrow\; \{(T,\Theta)\} \;\leftrightarrow\; \mathbb{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$$

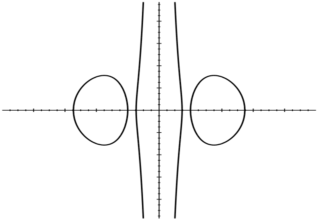
$\mathbb{H}_g$ est isomorphe à un domaine borné homogène de $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$ $\Rightarrow$

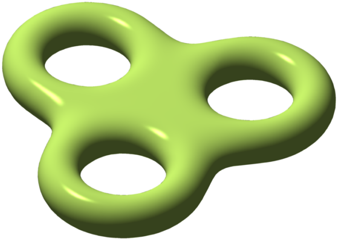
$\mathcal{A}_g := \mathbb{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ est une variété quasi-projective (Baily-Borel)

(espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées)

Cas des courbes

C courbe algébrique $\quad = \quad$ surface de Riemann





Nombre de trous $= g :=$ genre de C

$$H^1(C,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}\ , \quad H^{1,0} \cong \mathbb{C}^g\ .$$

Le tore $JC := H^{0,1}/H^1(C,\mathbb{Z})$ est la jacobienne de C; il joue un rôle fondamental dans la théorie des courbes.

Théorème de Torelli

Géométriquement, JC s'obtient à partir de

$$C^{(g)} := C^g/\mathfrak{S}_g = \{(p_1 + \ldots + p_g) \mid p_i \in C\}$$

en contractant les courbes rationnelles; et Θ est l'image de

$$p + C^{(g-1)} = \{(p + p_1 \ldots + p_{g-1}) \mid p \in C \text{ fixé}\}$$

Théorème (Torelli, 1913)

La courbe C est déterminée par (JC, Θ).

i.e: l'application des périodes $\wp : \begin{cases} \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g \\ C \longmapsto (JC, \Theta) \end{cases}$ est injective,

où $\mathcal{M}_g :=$ {classes d'isomorphisme de courbes de genre g}

Le problème de Schottky

En fait $\mathcal{M}_g$ est une variété projective, l'espace des modules des courbes de genre g; et $\wp : \mathcal{M}_g \hookrightarrow \mathcal{A}_g$ est un plongement.

Par contre $\wp$ n'est pas surjectif pour $g \geq 4$:

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3 \qquad \dim \mathcal{A}_g = \frac{1}{2} g(g+1) \ .$$

La détermination de l'image de $\wp$ est un problème classique de géométrie algébrique (problème de Schottky), pas encore complètement résolu.

Sur les démonstrations de Torelli

Nombreuses démonstrations, presque toutes géométriques.

Par exemple:

$\forall a \in JC$, l'espace tangent $T_a(JC)$ s'identifie à $T_0(JC) = T$.

Taylor en $a \in \Theta$: $\theta(z) = \theta'(a)\cdot(z-a) + \frac{1}{2}\theta''(a)\cdot(z-a) + \ldots$

$a \in \mathrm{Sing}(\Theta) \Leftrightarrow \theta'(a) = 0$; alors

$\theta''(a) \rightsquigarrow$ quadrique $C_a(\Theta) \subset \mathbb{P}(T)$, cône tangent (projectif) en a.

Théorème (Green, 1984)

L'intersection des $C_a(\Theta)$ dans $\mathbb{P}(T)$ est égale à C

(sauf pour quelques C exceptionnelles).

Structures de Hodge du type courbes

Certaines SH ressemblent à celles des courbes, par exemple:

X variété de dimension 3, $H^{3,0} = 0$ (i.e. $\Omega^3_{\mathrm{hol}} = 0$).

C'est le cas des variétés les plus simples: hypersurfaces de degré ≤ 4 dans $\mathbb{P}^4$, intersection de 2 ou 3 quadriques, etc.

Structure de Hodge $\qquad H^3(X,\mathbb{Z}) \subset H^3(X,\mathbb{C}) = H^{2,1} \oplus H^{1,2}$

$\Leftrightarrow$ tore polarisé $JX = H^{1,2}/H^3(X,\mathbb{Z}) :=$ jacobienne intermédiaire

Théorème (Clemens-Griffiths, 1972)

Une hypersurface cubique $X \subset \mathbb{P}^4$ est déterminée par (JX,Θ).

Démonstration (Mumford, AB):

Θ a un seul point singulier a, de multiplicité 3, et

$$C_a(\Theta) \cong X \subset \mathbb{P}(T) \cong \mathbb{P}^4 \ .$$

Digression: le problème de Lüroth

Problème de Lüroth

$$\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n) \ \Rightarrow \ K = \mathbb{C}(y_1, \ldots, y_r) \text{ ?}$$

Oui pour $n = 1$ (Lüroth, 1875).

Oui pour $n = 2$ (Castelnuovo, 1894).

Non pour $n \geq 3$? "conjecturé" par les géomètres italiens (Fano).

Contre-exemple (Clemens-Griffiths)

$K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_4)$ *avec la relation* $\sum x_i^3 = 1$.

Idée: si $K \cong \mathbb{C}(y_1, \ldots, y_3)$, l'hypersurface $\sum X_i^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^4$ est *rationnelle* $\Rightarrow$ JX est la jacobienne d'une courbe.

Mais pour une courbe de genre 5 $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geq 1$, contradiction.

Digression, suite et fin

La méthode de la jacobienne intermédiaire donne beaucoup de contre-exemples en dimension 3. Par exemple (AB, 1977):

- $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_6)$ *avec* $\sum a_i x_i^2 = \sum b_i x_i^2 = \sum c_i x_i^2 = 1$.

2 autres contre-exemples sont apparus début 70, avec des méthodes différentes:

- $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_4)$ *avec* $\sum x_i^4 = 1$ (Iskovskikh-Manin, méthode de Fano).
- $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots x_3, u)$ *avec* $u^2 = \begin{pmatrix} \ell_{11}(x) & \ldots & \ell_{14}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \ell_{41}(x) & \ldots & \ell_{44}(x) \end{pmatrix}$

  $\big(\ell_{ij}$ linéaire, $\ell_{ij} = \ell_{ji}\big)$; Artin-Mumford, groupe de Brauer.

S surface: $\quad H^2(S,\mathbb{Z}) \subset H^2(S,\mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$

$+$ polarisation donnée par forme quadratique entière sur $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Exemple : surfaces quartiques $S \subset \mathbb{P}^3$. Alors $\Omega^2_{\mathrm{hol}}(S) = \mathbb{C}\,\omega$,

où ω ne s'annule pas (localement $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$, $f(x,y) \neq 0$).

($\Rightarrow$ S est une surface K3).

On a $H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, d'où une classe $h \in H^2(S,\mathbb{Z})$; on pose

$$H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}} := h^{\perp} := \text{cohomologie primitive de } S.$$

Théorème (Shafarevich – Piatetski-Shapiro, 1971)

$S, S' \subset \mathbb{P}^3$ quartiques. $\exists\ H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} H^2(S',\mathbb{Z})_{\mathrm{o}}$ isomorphisme de structures de Hodge polarisées $\Rightarrow$ $S \cong S'$.

Application des périodes

$$H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}} \subset H^2(S,\mathbb{C})_{\mathrm{o}} = \mathbb{C}\,\omega \oplus H^{1,1}_{\mathrm{o}} \oplus \mathbb{C}\,\bar{\omega} \qquad \dim(H^{1,1}_{\mathrm{o}}) = 19$$

déterminée par $\mathbb{C}\,\omega \subset H^2(S,\mathbb{C})_{\mathrm{o}}$: $H^{1,1}_{\mathrm{o}} = (\mathbb{C}\,\omega \oplus \mathbb{C}\,\bar{\omega})^{\perp}$.

On a $\omega^2 = 0$, et $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$.

Application des périodes: réseau L isomorphe à $H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}}$ ($\forall\, S$).

"Quartique marquée": (S,φ), $\varphi : H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} L$ isométrie

(correspond au choix d'une base symplectique pour les courbes).

$\tilde{\wp}(S,\varphi) := \varphi(\mathbb{C}\,\omega)$ vit dans $\Omega := \{x \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid x^2 = 0\ ,\ x \cdot \bar{x} > 0\}$.

$\mathcal{F}_4 :=$ espace des modules des quartiques dans $\mathbb{P}^3$

$= \{$polynômes homogènes $P \in \mathbb{C}[X_0,\ldots,X_3]$ de degré $4\}^{\mathrm{o}}/GL(4)$

$\tilde{\wp}$ induit $\qquad \wp : \mathcal{F}_4 \to \Omega/O(L)$.

Surjectivité

Shafarevich – Piatetski-Shapiro $\Rightarrow$ $\wp$ est injective.

$\Omega/O(L)$ est une variété quasi-projective, et $\wp$ est un morphisme.

Théorème

$\wp : \mathcal{F}_4 \xrightarrow{\sim} \Omega^{\mathrm{o}}/O(L)$, *où* $\Omega^{\mathrm{o}} =$ *complément d'une réunion localement finie d'hyperplans de* $\Omega \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$*.*

Ce résultat, tout à fait particulier aux surfaces K3, donne une connaissance exceptionnelle de l'espace des modules: par exemple, quelles sont les courbes tracées sur une telle surface.

Une structure de Hodge de type K3

Un cas analogue : l'hypersurface cubique $X \subset \mathbb{P}^5$. Dans ce cas :

$$H^4(X,\mathbb{Z}) \subset H^4(X,\mathbb{C}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2} \oplus H^{1,3} \ , \ \text{avec } \dim H^{3,1} = 1 \ .$$

Soit $M := H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{o}}$, et $\Omega_M := \{x \in \mathbb{P}(M_{\mathbb{C}}) \mid x^2 = 0 \ , \ x \cdot \bar{x} < 0\}$.

Soit $\mathcal{C}$:= espace des modules des hypersurfaces cubiques $\subset \mathbb{P}^4$

$= \{$polynômes homogènes $P \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_4]$ de degré $3\}^{\mathrm{o}}/GL(5)$.

On construit comme plus haut $\wp : \mathcal{C} \to \Omega_M/O(M)$.

Théorème (Voisin, 1986; Looijenga, 2009)

$\wp : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \Omega_M^{\mathrm{o}}/O(M)$, où Ω_M^{o} = complément d'une réunion localement finie d'hyperplans de $\Omega_M \subset \mathbb{P}(M_{\mathbb{C}})$.

Et en général?

Théorème (Donagi, 1983)

$X, X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ hypersurfaces de degré d, X générale.

$H^n(X,\mathbb{Z})_o \xrightarrow{\sim} H^n(X',\mathbb{Z})_o$ isomorphisme de SH polarisées.

Alors $X' \cong X$, sauf dans les cas exceptionnels suivants:

$$n=2, d=3; \quad d \mid n+2; \quad d=4, n=4k; \quad d=6,\ n=6k+1\ .$$

Comme avant, application $\wp : \mathcal{M} \to \Omega/\Gamma$; thm $\Leftrightarrow$ $\wp$ de degré 1.

Ingrédient : Interprétation par Griffiths de la SH de $H^n(X,\mathbb{Z})$ en termes de l'idéal jacobien $J_F = (F'_{X_0}, \ldots, F'_{X_n}) \subset \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$.

Idée : On récupère X, non pas à partir de $\wp(X)$, mais de l'application tangente $T_X(\wp)$. Celle-ci permet de retrouver, par des manipulations purement algébriques, l'idéal J_F, qui détermine F.

Conclusion

Je n'ai touché qu'un aspect des applications de la théorie de Hodge; il y en a bien d'autres, notamment à la théorie des cycles algébriques – description et structure des sous-variétés d'une variété donnée.

Une très bonne référence pour aller (beaucoup) plus loin:

C. Voisin: *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours Spécialisés **10**. SMF, Paris, 2002.

FIN