ARNAUD BEAUVILLE

La congettura di Hodge

La congettura di Hodge è uno dei sette «problemi del Millennio», per la soluzione di ciascuno dei quali il Clay Mathematical Institute ha messo in palio un premio di un milione di dollari.

Fu formulata da William Hodge nel 1941 (ben prima del testo del 1950, spesso citato come la fonte originale) come parte di un problema di piú ampia portata, oggi noto come la congettura di Hodge «generale», di cui daremo una formulazione precisa piú avanti. Riassumendo in breve, Hodge prima dimostra che se un ciclo topologico Γ di dimensione p di una varietà proiettiva è contenuto in una sottovarietà di dimensione (complessa) $r < p$, allora gli integrali di certe forme differenziali calcolati lungo il ciclo Γ sono nulli. Quindi si chiede se sia vero anche l'inverso:

> La domanda se queste condizioni [necessarie] siano sufficienti riveste grande importanza nelle applicazioni della teoria degli integrali armonici alla geometria algebrica, ma al momento trova risposta solo in casi particolari.

Il caso particolare $p = 2r$, cioè la caratterizzazione di quei cicli topologici che sono algebrici (in un senso che verrà precisato qui di seguito), è oggi noto come la congettura di Hodge, sebbene lo stesso Hodge non sembrò considerarlo come particolarmente importante, né lo formulò in termini di congettura. A questo punto è bene dire che la formulazione che diede Hodge è in realtà inesatta – in modo meno grave nel caso della congettura di Hodge usuale, in modo piú serio nel caso di quella generale (cfr. la discussione nei §§ 4 e 7).

Il saggio sarà articolato nel modo seguente. I due paragrafi preliminari (§§ 1 e 2) introducono le nozioni di base che sono necessarie per enunciare la congettura di Hodge (usuale), che sarà esposta nel paragrafo 3. Nel paragrafo 4, spiegheremo i motivi per cui tale congettura dev'essere leggermente modificata. Nel 5 considereremo il caso dei cicli di codimensione 1 (= divisori), che è dovuto a Lefschetz. Nel 6, esporremo i pochi casi per i quali la congettura è nota e gli esempi naturali sui quali dovrebbe essere verificata. Nel paragrafo 7, spiegheremo perché la congettura di Hodge deve essere modificata, come fu osservato per la prima volta da Grothendieck, e nel paragrafo 8 esamineremo alcune delle conseguenze che tale congettura ha sulla struttura del gruppo dei cicli algebrici. Piú in generale, ci soffermeremo brevemente sulla relazione fra tale gruppo e la teoria di Hodge.

1. *Coomologia.*

Sebbene Hodge abbia enunciato il suo problema in termini di un invariante topologico chiamato «omologia», è invalso l'uso di formularlo in termini di «coomologia». In questo paragrafo ricorderemo le proprietà di tale invariante che saranno necessarie.

I gruppi di coomologia sono invarianti topologici che possono essere definiti su ogni spazio topologico ragionevole. Qui di seguito restringeremo la nostra attenzione al caso in cui lo spazio topologico è una varietà differenziabile compatta, vale a dire uno spazio topologico compatto localmente isomorfo a un $\mathbb{R}^n$ sul quale è possibile definire la nozione di funzione regolare (= differenziabile infinite volte). Assumeremo sempre che tali varietà siano connesse e *orientate* – cioè assumeremo che per ciascun punto della varietà sia assegnata un'orientazione dello spazio tangente a quel punto, che varia con continuità al variare del punto stesso.

(1.1) Sia M una varietà di dimensione m compatta e orientata. L'anello di coomologia $H^*(M, \mathbb{Z})$ è un anello anticommutativo[1] graduato, finitamente generato come gruppo abeliano. Tale anello gode delle seguenti proprietà:

a) $H^p(M, \mathbb{Z}) = 0$ se $p < 0$ o se $p > m$, $H^0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot 1$. Inoltre, è definito un isomorfismo canonico $\int_M : H^m(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

b) *Funtorialità.* Sia N un'altra varietà compatta e orientata di dimensione n. Ad ogni applicazione regolare $f: M \to N$ sono associate le applicazioni di *push forward* (portato in avanti) e *pull back* (tirato indietro):

$$f^* : H^*(N, \mathbb{Z}) \to H^*(M, \mathbb{Z}) \quad \text{e} \quad f_* : H^*(M, \mathbb{Z}) \to H^*(N, \mathbb{Z})$$

dove f^* è un omomorfismo di anelli graduati, mentre f_* è solo un omoforfismo di gruppi, di grado $n - m$ (cioè, $f_*(H^p(M, \mathbb{Z})) \subset H^{p+n-m}(N, \mathbb{Z})$). Tali applicazioni soddisfano le seguenti proprietà:

$$f_*(\alpha \cdot f^*\beta) = f_*\alpha \cdot \beta \quad \text{per} \quad \alpha \in H^*(M, \mathbb{Z}) \quad \text{e} \quad \beta \in H^*(N, \mathbb{Z})$$

$$\text{e} \int_N f_*\alpha = \int_M \alpha, \quad \text{per} \quad \alpha \in H^m(M, \mathbb{Z}).$$

c) *Dualità di Poincaré.* La forma bilineare

$$H^p(M, \mathbb{Z}) \otimes H^{m-p}(M, \mathbb{Z}) \to H^m(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{Z}$$

[1] Questo significa che $\beta \cdot \alpha = (-1)^{pq} \alpha \cdot \beta$ per $\alpha \in H^p(M, \mathbb{Z})$, $\beta \in H^q(M, \mathbb{Z})$.

definita a partire dalla moltiplicazione in $H^*(M, \mathbb{Z})$ è non degenere, cioè l'omomorfismo indotto

$$H^{m-p}(M,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^p(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

è un isomorfismo a meno di torsione[2].

d) *Formula di Künneth*. L'applicazione

$$H^*(M,\mathbb{Z}) \otimes H^*(N,\mathbb{Z}) \to H^*(M \times N,\mathbb{Z}),$$

definita da $\alpha \otimes \beta \mapsto \mathrm{pr}_M^* \alpha \cdot \mathrm{pr}_N^* \beta$, è un isomorfismo a meno di torsione.

Esempio 1.2. Da 1.1.*a*) segue che $H^*(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\varepsilon$, dove

$$\varepsilon \in H^1(S^1,\mathbb{Z}), \varepsilon^2 = 0 .$$

Sia $T = V/\Gamma$ un toro reale, dove V è uno spazio reale (di dimensione finita) e Γ un reticolo contenuto in V. Ogni elemento ℓ di $\Gamma^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z})$ definisce un'applicazione $u_\ell : V/\Gamma \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$, e quindi una classe $\varphi(\ell) = u_\ell^*\varepsilon$ in $H^1(T, \mathbb{Z})$. Dalla formula di Künneth si deduce che la mappa $\varphi : \Gamma^* \to H^1(T, \mathbb{Z})$ è un isomorfismo di gruppi, che si estende a un isomorfismo di anelli tra $H^*(T, \mathbb{Z})$ e l'algebra $\mathrm{Alt}^*(\Gamma, \mathbb{Z})$ delle forme completamente antisimmetriche, $\mathbb{Z}$-multilineari definite su Γ.

Se R è un anello, definiamo $H^*(M,R) = H^*(M,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Di fatto utilizzeremo tale estensione solo nel caso in cui $R = \mathbb{Q}$ o $R = \mathbb{C}$. In tal caso, il passaggio da $H^*(M, \mathbb{Z})$ a $H^*(M, R)$ elimina il sottogruppo di torsione di $H^*(M, \mathbb{Z})$ e induce un'immersione del quoziente di $H^*(M, \mathbb{Z})$ privo di torsione in $H^*(M, R)$. Le proprietà *a*) e *d*) sono verificate quando si sostituisce a $\mathbb{Z}$ l'anello R. Ovviamente, anche le proprietà *c*) e *d*) continuano a valere, poiché i problemi causati dalla torsione scompaiono.

L'algebra di coomologia $H^*(M, \mathbb{C})$ può essere interpretata in termini di forme differenziali definite su M. Si ricordi che una *p-forma* ω su M assegna a ciascun punto $q \in M$ una forma p-lineare a valori in $\mathbb{C}$, definita sullo spazio tangente $T_q(M)$. Tale forma p-lineare varia in modo regolare al variare del punto q. Dato un sistema di coordinate locali $(x_1, \dots, x_m)$, definite in un intorno del punto q, ω è data dalla somma di espressioni del tipo $f(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$. Si denoti con $\Omega_p(M)$ lo spazio delle p-forme su M e con $\Omega^*(M) = \bigoplus_p \Omega^p(M)$. Tale spazio è dotato, in modo naturale, di una derivazione d di grado 1, caratterizzata dalla seguente formula:

$$\mathrm{d}\left(f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\right) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

[2] Per 1.1.*c*) e *d*) esiste anche un enunciato per i sottogruppi di torsione, ma in quanto segue non ne avremo bisogno.

Poiché tale derivazione soddisfa la proprietà $d^2 = 0$, si ha l'inclusione $\mathrm{Im}\, d \subset \mathrm{Ker}\, d$.

Proposizione 1.3 (de Rham). *Esiste un isomorfismo canonico*:

$$H^*(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d.$$

Questo è un isomorfismo di spazi vettoriali graduati, e di fatto di algebre graduate, dove la struttura di algebra su $\mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$ è quella indotta dal prodotto wedge delle forme differenziali. Le forme α tali che $d\alpha = 0$ sono chiamate, tradizionalmente, forme *chiuse*, mentre quelle della forma $d\beta$ sono chiamate forme *esatte*. Quindi gli elementi di $H^p(M, \mathbb{C})$ sono rappresentati da p-forme chiuse modulo p-forme esatte.

L'isomorfismo $\int_M : H^m(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ è ottenuto integrando le m-forme sulla varietà M (da cui la notazione usata per denotarlo). Se $f: M \to N$ è un'applicazione regolare, l'omomorfismo $f^* : H^*(N, \mathbb{C}) \to H^*(M, \mathbb{C})$ è indotto dall'applicazione di pull back definita sulle forme differenziabili. Anche la mappa di push forward $f_*: H^*(M, \mathbb{C}) \to H^*(N, \mathbb{C})$ ha un'interpretazione in termini di forme differenziabili («l'integrazione lungo le fibre»), ma non ne avremo bisogno in quanto segue.

Esempio 1.4. Consideriamo nuovamente il caso $M = S^1$, la circonferenza unitaria in $\mathbb{C}$, parametrizzata da $t \mapsto e^{it}$. Una 1-forma su S^1 può essere scritta come $f(t)dt$, dove f è una funzione regolare, periodica su $\mathbb{R}$, di periodo 2π. In questo caso abbiamo che $\mathrm{Ker}\, d = \Omega^1$, e la classe di dt modulo $\mathrm{Im}\, d$ genera $H^1(S^1, \mathbb{C})$. Piú in generale, se $T = V/\Gamma$, definito nell'esempio (1.2), l'isomorfismo $i_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Alt}^*(\Gamma,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^*(T,\mathbb{Z})$ definito in (1.2) si estende a un isomorfismo $i_{\mathbb{C}} : \mathrm{Alt}^*(V,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(T,\mathbb{C})$, dove $\mathrm{Alt}^*(V, \mathbb{C})$ è lo spazio delle p-forme antisimmetriche definite su V e a valori in $\mathbb{C}$; questo isomorfismo associa a ogni forma p-lineare φ una forma differenziale costante, uguale a φ in ogni punto di T (si noti che lo spazio tangente di T in ciascun punto è canonicamente identificato con V). In particolare, si restringe all'isomorfismo $i_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Alt}^*(\Gamma,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^*(T,\mathbb{Z})$, una volta identificato $\mathrm{Alt}^p(\Gamma, \mathbb{Z})$ con il sottogruppo di $\mathrm{Alt}^p(V, \mathbb{C})$ delle p-forme che assumono valori interi su Γ. In modo simile, $i_{\mathbb{C}}$ si restringe a un isomorfismo $\mathrm{Alt}^p(\Gamma \otimes \mathbb{Q},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^p(T,\mathbb{Q})$.

2. *La decomposizione di Hodge.*

Il contributo fondamentale di Hodge fu estendere il teorema di de Rham al caso delle varietà complesse. Sia X una varietà complessa di dimensione (complessa) uguale a n. Questo significa che esiste un ricoprimento di X

costituito da sottoinsiemi aperti e che per ciascuno di tali aperti esiste un omeomorfismo $(z_1, \ldots, z_n)$: $U \to \Omega \subset \mathbb{C}^n$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{C}^n$. Inoltre, il passaggio da un sistema di coordinate a un altro è definito mediante funzioni olomorfe.

Ponendo $z_k = x_k + iy_k$, le funzioni $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ formano un sistema di coordinate reali per la varietà X definite sull'aperto U, quando X è vista come varietà reale. In particolare, possiamo scrivere le forme differenziali definite sull'aperto U utilizzando coordinate complesse. Infatti, se definiamo:

$$dz_k = dx_k + i dy_k \qquad d\bar{z}_k = dx_k - i dy_k$$

ogni forma differenziale può essere scritta usando le dz_k, $d\bar{z}_k$ anziché le dx_k, dy_k. Diciamo che una forma differenziabile ω è di tipo (p, q) se, in ogni sistema di coordinate, può essere scritta come una somma finita di forme del tipo

$$a(z, \bar{z}) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Denotiamo con $H^{p,q}(X)$, o piú semplicemente con $H^{p,q}$, il sottospazio dello spazio $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ che consiste degli elementi di tipo (p, q). Supponiamo ora che X sia una varietà *proiettiva*, cioè che X sia una sottovarietà complessa di un qualche spazio proiettivo[3]. Il risultato fondamentale di Hodge, noto come decomposizione di Hodge, è espresso dalla seguente formula:

$$H^r(X, \mathbb{C}) = H^{r,0} \oplus \cdots \oplus H^{0,r}. \tag{2.1}$$

Tale risultato è altamente non banale e si basa sulla teoria degli operatori differenziali ellittici definiti su varietà compatte. Per ottenerlo non è necessario che la varietà X sia proiettiva. Infatti è sufficiente supporre che X soddisfi una proprietà piú debole, cioè che sia dotata di una metrica riemanniana compatibile, in senso forte, con la struttura complessa. Tali metriche sono dette di Kähler. Lo spazio proiettivo è dotato di una tale metrica, chiamata metrica di Fubini-Study. Siccome la restrizione a ogni sottovarietà complessa di una metrica di Kähler è ancora di Kähler, ogni varietà proiettiva possiede una metrica di questo genere (che è quella indotta dalla metrica di Fubini-Study). Il manuale di André Weil [1958] rimane un eccellente testo di riferimento sull'argomento.

Un approccio del tutto differente, cioè puramente algebrico, alla decomposizione di Hodge è stato scoperto successivamente da Pierre Deligne e Luc Illusie [1987].

[3] In questo caso, grazie a un famoso risultato di Chow, X può essere definita in termini di equazioni polinomiali.

(2.2) La decomposizione di Hodge si comporta bene rispetto alle operazioni definite in (1.1):

a) Abbiamo $H^0(X, \mathbb{C}) = H^{0,0}$, $H^{2n}(X, \mathbb{C}) = H^{n,n}$, e la moltiplicazione definita su $H^*(X, \mathbb{C})$ manda $H^{p,q} \times H^{p',q'}$ in $H^{p+p',q+q'}$.

b) Se $f : X \to Y$ è un'applicazione definita tra varietà proiettive, con $\dim Y - \dim X = c$, abbiamo

$$f^*(H^{p,q}(Y)) \subset H^{p,q}(Y) \quad \text{e} \quad f_*(H^{p,q}(X)) \subset H^{p+c,q+c}(X).$$

c) La dualità di Poincaré si restringe a una forma bilineare perfetta

$$H^{p,q} \times H^{n-p,n-q} \to H^{n,n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

Si noti che tutte queste proprietà seguono immediatamente dal teorema di Hodge (si usi 1.1.*b*) per l'enunciato che riguarda f_*).

Lo spazio $H^r(X,\mathbb{C}) = H^r(X,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ è munito di un'involuzione naturale $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, che corrisponde all'operazione di coniugio per le forme differenziali. Tale operazione scambia $d\bar{z}_k$ con dz_k e quindi abbiamo

$$H^{q,p} = \overline{H^{p,q}} \quad \text{(«simmetria di Hodge»).} \tag{2.3}$$

Una «struttura di Hodge» è uno spazio vettoriale V (sul campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$)[4] dotato di una decomposizione in somma diretta

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}$$

tale che $V^{q,p} = \overline{V^{p,q}}$. Un morfismo di strutture di Hodge è un omomorfismo $\varphi : V \to W$ tale che $\varphi_{\mathbb{C}}(V^{p,q}) \subset W^{p,q}$, per ogni p, q. Le strutture di Hodge formano una categoria abeliana; per esempio, una sottostruttura di Hodge W di V è uno spazio vettoriale (definito sul campo dei numeri razionali), tale che

$$W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \oplus W^{p,q}, \text{ dove } W^{p,q} = (W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \cap V^{p,q}.$$

La decomposizione di Hodge definisce un *funtore controvariante* dalla categoria delle varietà proiettive in quella delle strutture di Hodge, che associa a ogni varietà X lo spazio vettoriale $H^*(X, \mathbb{Q})$.

Esempio 2.4. Si consideri un toro $T = V/\Gamma$ come in 1.2 e si assuma, inoltre, che V sia uno spazio vettoriale *complesso*, in modo che T risulti una varietà compatta e complessa. In questo caso si può dimostrare direttamente la decomposizione di Hodge (2.1). Ricordiamo (esempio 1.4) che abbiamo un isomorfismo canonico

[4] Se V è uno $\mathbb{Z}$-modulo, la stessa definizione fornisce la nozione di struttura di Hodge sull'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$$\mathrm{Alt}^r_{\mathbf{R}}(V,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^r(X,\mathbb{C})$$

che associa ad ogni r-forma lineare φ totalmente antisimmetrica la classe della r-forma differenziale costante su T, che ha come valore costante φ. Rendendo esplicito questo isomorfismo, vediamo che la decomposizione di Hodge corrisponde alla seguente formula:

$$\mathrm{Alt}^r_{\mathbf{R}}(V,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \mathrm{Alt}^{p,q}(V),$$

dove $\mathrm{Alt}^{p,q}(V)$ è il sottospazio delle r-forme lineari che soddisfano la condizione $\varphi(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_r) = \lambda^p \bar{\lambda}^q \varphi(v_1, \ldots, v_r)$,, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v_1, \ldots, v_r \in V$.

La teoria di Hodge è diventata uno degli argomenti essenziali della geometria algebrica complessa. Tra le sue nozioni fondamentali si trovano quella di variazione di strutture di Hodge, quella di mappa dei periodi e quella, dovuta a Deligne, dell'estensione della decomposizione di Hodge al caso delle varietà non compatte e possibilmente singolari. Tale teoria trova applicazione allo studio dei cicli algebrici. Per un trattamento esaustivo consigliamo il libro di Claire Voisin [2002], che copre gran parte degli argomenti trattati in queste note.

3. *L'enunciato della congettura di Hodge.*

Da qui in avanti, denoteremo con X una varietà proiettiva complessa di dimensione n. Sia Z una sottoviarietà irriducibile di X di codimensione p; vogliamo associare a Z una classe di coomologia $[Z] \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$.

Si assuma per il momento che Z sia una varietà liscia. L'immersione (regolare) $i : Z \hookrightarrow X$ definisce una mappa di push forward $i_* : H^*(Z, \mathbb{Z}) \to H^{*+2p}(X, \mathbb{Z})$. Poniamo $[Z] := i_* 1 \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$.

Ci sono vari modi per estendere tale definizione al caso in cui Z sia singolare. Il piú veloce fa uso di un profondo teorema dovuto a Hironaka, che fornisce una *risoluzione* di Z, cioè, una varietà proiettiva $\tilde{Z}$ e un'applicazione $\tilde{Z} \to Z$, che è un isomorfismo se ristretto alla preimmagine del luogo singolare di Z. Se indichiamo con $i : \tilde{Z} \to X$ l'applicazione indotta dalla mappa di risoluzione della singolarità di Z, è facile verificare che $i_* 1 \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ è indipendente dalla scelta di $\tilde{Z}$. Denotiamo quindi con $[Z]$ l'immagine di Z in $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ via l'applicazione i_*.

Sia $\alpha \in H^{2n-2p}(X, \mathbb{Z})$. Da 1.1.*b*) segue che $[Z] \cdot \alpha = i_* i^* \alpha$ e

$$\int_X [Z] \cdot \alpha = \int_{\tilde{Z}} i^* \alpha \,. \tag{3.1}$$

Questa formula caratterizza la classe $[Z]$ a meno di torsione.

Si noti che la stessa costruzione può essere usata nel caso di varietà compatte, *reali*, di codimensione $2p$. In tal caso si ottiene ogni elemento di $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$, a meno di moltiplicazione per un numero intero. Al contrario, le classi di coomologia che rappresentano sottovarietà complesse sono molto particolari.

Proposizione 3.2. *La classe* $[Z]$ *in* $H^{2p}(X, \mathbb{C})$ *è di tipo* (p, p).

Dimostrazione. A causa del comportamento della decomposizione di Hodge rispetto alla dualità di Poincaré (2.2.*c*), è sufficiente dimostrare che $[Z] \cdot \alpha = 0$ per ogni $\alpha \in H^{n-a,\, n-b}$, con $a + b = 2p$ e $a \neq b$. In tal caso, a o b è minore di p. Supponiamo quindi, per fissare le idee, che a sia minore di p, cosicché $n - a > n - p$. Utilizzando le notazioni introdotte prima, abbiamo che $\dim \tilde{Z} = n - p$, quindi $H^{n-a,\, n-b}(\tilde{Z}) = 0$ e $i^*\alpha = 0$. La dimostrazione della proposizione segue ora da (3.1).

Sia $Z^p(X)$ il gruppo abeliano libero generato dalle sottovarietà di X irriducibili e di codimensione p. Gli elementi di $Z^p(X)$ sono detti *cicli algebrici* di codimensione p e, per definizione, sono espressioni formali del tipo $n_1 Z_1 + \cdots + n_k Z_k$, dove $Z_1, \ldots, Z_k$ sono sottovarietà irriducibili di X di codimensione p, e $n_1, \ldots, n_k$ sono numeri interi. I cicli di codimensione 1 sono chiamati, tradizionalmente, «divisori». L'applicazione $Z \mapsto [Z]$ si estende per linearità a un omomorfismo di gruppi $c : Z^p(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Z})$, detto «applicazione della classe ciclo». La sua immagine, denotata con $H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$, è il sottogruppo delle classi di coomologia algebriche. Se $j : H^{2p}(X, \mathbb{Z}) \to H^{2p}(X, \mathbb{C})$ è l'omomorfismo naturale, l'enunciato della proposizione precedente si può esprimere mediante la seguente formula:

$$H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} \subset j^{-1}(H^{p,p}).$$

Hodge si chiese se anche l'inclusione opposta fosse vera:

$$H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} = j^{-1}(H^{p,p}) \quad \text{(«congettura di Hodge su } \mathbb{Z}\text{»).}$$

Come mostreremo nel prossimo paragrafo, tale uguaglianza, in generale, è falsa; è necessario lavorare con coeffienti razionali e non con coefficienti interi. Consideriamo quindi l'applicazione $c : Z^p(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ e denotiamo la sua immagine con $H^{2p}(X, \mathbb{Q})_{\text{alg}}$. Se identifichiamo $H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ con un sottogruppo di $H^{2p}(X, \mathbb{C})$, l'enunciato precedente diventa:

Congettura di Hodge. $H^{2p}(X, \mathbb{Q})_{\text{alg}} = H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}$.

Denotiamo ora con $\mathrm{Hdg}^p(X) = H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}$ e con $\mathrm{Hdg}(X) = \bigoplus_p \mathrm{Hdg}^p(X)$. Questo è un sottoanello di $H^*(X, \mathbb{Q})$, chiamato «anello di Hodge». Un risultato di gran lunga meno ovvio è espresso nella seguente proposizione.

Proposizione 3.3. $H^*(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} = \bigoplus_p H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}}$ *è un sottoanello di* $H^*(X,\mathbb{Q})$.

L'idea della dimostrazione è la seguente. Diciamo che due sottovarietà irriducibili Z e Z' di codimensione p e p' hanno *intersezione propria*, se ogni componente W di $Z \cap Z'$ ha codimensione $p + p'$. In questo caso si può definire la *molteplicità di intersezione*, $m_W(Z \cap Z')$, di $Z \cap Z'$ lungo W (tale definizione generalizza la nozione familiare di molteplicità dei punti di intersezione di due curve nel piano, come viene espressa dal teorema di Bézout). Se definiamo il prodotto di intersezione $Z \cdot Z'$ come il ciclo algebrico $\sum_W m_W(Z \cap Z')W$, si dimostra che $c(Z \cdot Z') = [Z] \cdot [Z']$. In particolare, la classe $[Z] \cdot [Z']$ è algebrica.

Quando Z e Z' non si intersecano propriamente, è possibile deformare Z' in modo algebrico (e di fatto in modo razionale: cfr. § 8.3), fino a ottenere un ciclo Z'' le cui componenti intersecano propriamente Z. Poiché la classe di coomologia è un invariante discreto, rimane invariata durante tale deformazione, e quindi $[Z] \cdot [Z'] = [Z] \cdot [Z'']$ è ancora un ciclo algebrico.

Osservazione 3.4. In particolare, nel caso in cui Z e Z' siano due sottovarietà irriducibili tali che $\dim Z + \dim Z' = n$ e $Z \cap Z'$ sia un insieme finito di punti, si vede che $\int_X [Z] \cdot [Z']$ rappresenta il numero dei punti di intersezione di Z con Z', contati con le loro molteplicità.

Esempio 3.5. Una «varietà abeliana» è un toro complesso V/Γ con una struttura di varietà proiettiva. Secondo un classico risultato dovuto a Riemann, una condizione necessaria e sufficiente affinché un toro complesso sia proiettivo è data dall'esistenza di una forma $\mathbb{R}$-bilineare antisimmetrica $E : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che:

(i) $E(\lambda v, \lambda w) = |\lambda|^2 E(v, w)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v, w \in V$;
(ii) $E(iv, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$ in V;
(iii) E assume valori interi se ristretta a Γ.

Tale forma è chiamata «polarizzazione» del toro complesso. La condizione (i) esprime il fatto che E appartiene allo spazio $\mathrm{Alt}^{1,1}(V) \cong H^{1,1}(T)$ (2.4), e la condizione (iii) ci dice che tale forma appartiene anche allo spazio $H^2(T, \mathbb{Z})$. Quindi possiamo pensare E come una classe in $H^2(T, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$. Riemann dimostrò che E definisce un elemento in $H^2(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ utilizzando certe funzioni olomorfe definite sullo spazio vettoriale V e quasi-periodiche[3] rispetto a Γ, chiamate «funzioni theta». L'insieme degli zeri di una tale funzione definisce una ipersuperficie di T, la cui classe di coomologia è rappresentata da E.

4. *Controesempi su* $\mathbb{Z}$.

Come accennato nei paragrafi precedenti, la congettura di Hodge è falsa nel caso delle classi di coomologia a coefficienti interi, cioè per le classi in $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. Questo fu fatto notare da Michael Atiyah e Friedrich Hirzebruch [1962]. In breve, essi osservarono, anzitutto, che il gruppo $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ può contenere elementi di torsione. Ogni elemento di questo genere si annulla in $H^{2p}(X, \mathbb{C})$ e quindi soddisfa automaticamente la condizione di Hodge. Allo stesso tempo, utilizzando la K-teoria topologica, scoprirono alcune condizioni necessarie affinché una classe di coomologia sia algebrica. Infine, costruirono (su una varietà proiettiva) esempi di classi di coomologia di torsione che non soddisfacevano le condizioni necessarie da loro trovate in precedenza.

Tutto ciò lascia comunque aperta la possibilità che la congettura di Hodge, nel caso di coefficienti interi, sia vera a meno di torsione e, in particolare, sia vera nel caso in cui $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ sia privo di torsione. Un esempio elementare, dovuto a János Kollár [AA.VV. 1992, pp. 134-35], mostra che anche in questo senso piú debole la congettura di Hodge è falsa. Il controesempio in questione è dato dal caso di una generica ipersuperficie di grado sufficientemente elevato in $\mathbb{P}^4$. Si considerino i gruppi $H^2(X, \mathbb{Z})$ e $H^4(X, \mathbb{Z})$. Utilizzando un argomento classico di topologia si mostra che $H^2(X, \mathbb{Z})$ è senza torsione e che è generato dalla classe h di una sezione iperpiana della varietà X. Si deduce quindi, utilizzando la dualità di Poincaré, che $H^4(X, \mathbb{Z})$ è generato da una classe ℓ tale che $\int_X \ell \cdot h = 1$.

Proposizione 4.1. *Sia $X \subset \mathbb{P}^4$ una generica ipersuperficie di grado p^3, dove p è un numero primo maggiore o uguale a 5. Allora, p divide il grado di ogni curva in X.*

Corollario 4.2. *Ogni classe algebrica in $H^4(X, \mathbb{Z})$ è un multiplo di $p \cdot \ell$. In particolare ℓ non è algebrica.*

Dimostrazione. Sia $C \subset X$ una curva algebrica. Poiché la classe ℓ genera $H^4(X, \mathbb{Z})$, abbiamo che $[C] = d\ell$, per qualche intero d. Allora $\int_X [C] \cdot h$

[3] Ciò significa che, per ogni γ in Γ, esiste una funzione affine ℓ_γ definita su V, tale che $\theta(v + \gamma) = e^{\ell_\gamma(v)}\theta(v)$, per tutti i v in V.

è uguale a d. Per l'osservazione 3.4, tale intero rappresenta il numero dei punti di intersezione (contati con la loro molteplicità) di C con un iperpiano, cioè d è il grado di C. Dalla proposizione precedente segue quindi che d è divisibile per p.

Dimostrazione (della Proposizione). Daremo solo un cenno di dimostrazione rimandando il lettore a [AA.VV. 1992] o [Soulé e Voisin 2005, § 2] per maggiori dettagli.

Si considerino 5 forme generiche di grado p in $\mathbb{P}^3$. Queste definiscono un'applicazione surgettiva ν da $\mathbb{P}^3$ a valori su un'ipersuperficie $X_0 \subset \mathbb{P}^4$. Tale ipersuperficie ha grado p^3 che è il numero di intersezione di 3 ipersuperfici di grado p in $\mathbb{P}^3$. Utilizzando argomenti standard di geometria algebrica, si può mostrare che l'applicazione $\nu : \mathbb{P}^3 \to X_0$ è 1:1 se ristretta al complemento di una superficie $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$, 2:1 se ristretta al complemento di una curva $\Gamma \subset \Sigma$ e 3:1 se ristretta al complemento di un insieme finito di punti contenuti in Γ. Si noti anche che X_0 è singolare lungo $\nu(\Sigma)$.

Si assuma ora che l'ipersuperficie generica di grado p^3 contenga una curva di grado d. Un risultato classico di geometria algebrica ci informa che, in questo caso, tale curva sarà contenuta anche in *tutte* le ipersuperfici di grado p^3 (intuitivamente, la curva «deve andare da qualche parte» quando passiamo dal caso generico a quello non generico). Cosí X_0 contiene una curva di grado d (in realtà si dovrebbe dire un ciclo algebrico, poiché la curva potrebbe avere varie componenti, alcune delle quali multiple). Se D è una di queste componenti, abbiamo che $\nu_*(\nu^{-1}(D)) = eD$, dove $e = 3, 2$ o 1 a seconda se D è contenuta in Γ, è contenuta in Σ ma non in Γ, o non è contenuta in Σ. In ogni caso troviamo un ciclo C in $\mathbb{P}^3$ tale che $\nu_* C = 6\, C_0$.

Per costruzione il pull back di un iperpiano in $\mathbb{P}^4$ rispetto a ν è una ipersuperficie di grado p in $\mathbb{P}^3$. In tal modo $\deg \nu_* C = p \deg C$ è divisibile per p. Poiché p è relativamente primo rispetto a 6, si conclude che $\deg C_0 = d$ è divisibile per p.

Un esempio cosí semplice non lascia alcuna speranza di ottenere un qualsiasi enunciato ragionevole della congettura di Hodge sull'anello degli interi. Malgrado ciò, si possono formulare alcune domande interessanti a proposito delle classi intere di tipo (p, p).

a) La proposizione 4.1, insieme ad alcuni suoi miglioramenti discussi in [AA.VV. 1992], rappresenta un passo verso la dimostrazione della congettura di Griffiths-Harris [1985]:

Il grado di ogni curva contenuta in una ipersuperficie generica in $\mathbb{P}^4$ di grado $d \geq 6$ è divisibile per d.

La condizione su d significa che l'ipersuperficie è di tipo generico. Per contro, Claire Voisin [2006] ha dimostrato che la congettura di Hodge su $\mathbb{Z}$ è valida per le varietà tridimensionali unirigate o di tipo Calabi-Yau.

È naturale aspettarsi un enunciato simile al precedente per ipersuperfici in $\mathbb{P}^{n+1}$, con $n \geq 4$. In questo caso, non è chiaro quale condizione si debba imporre su d: è certamente necessario che d debba essere maggiore a $2n$, poiché in caso contrario ogni ipersuperficie (di grado d) contiene una retta.

b) Le varietà abeliane sono un altro caso molto interessante. Si ricordi (cfr. § 3.5) che una varietà abeliana è un toro complesso $T = V/\Gamma$ dotato di una polarizzazione $E \in H^2(T, \mathbb{Z})$. Nell'algebra esterna $H^*(T, \mathbb{Z})$ e per ogni p, l'elemento E^p è divisibile per $p!$ (in realtà questo è vero per ogni elemento $\alpha \in H^i(T, \mathbb{Z})$, con $i > 0$, in conseguenza della formula multinomiale e del fatto che α è somma di elementi il cui quadrato è 0). Quindi $E^p / p!$ appartiene a $H^{2p}(T, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}$; *non è noto se tale elemento è algebrico* nel caso T sia una varietà abeliana generica di dimensione maggiore o uguale a 4 e $1 < p < g$.

Piú in generale, per ogni data varietà abeliana polarizzata (T, E) si può chiedere quale sia il piú piccolo multiplo algebrico dell'elemento $E^p / p!$: tale problema è aperto.

Il lavoro di Atiyah e Hirzebruch è stato rivisitato da Burt Totaro [1997] alla luce della nozione di «cobordismo complesso», che consente di definire un sottogruppo intermedio tra $H^2(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ e $H^2(X, \mathbb{Z})$. Il testo di Soulé e Voisin [2005] è un interessante complemento per alcuni degli argomenti trattati nel presente paragrafo. In particolare in tale lavoro si può trovare la costruzione (ispirata da quella presentata nella proposizione 4.1) di esempi di classi di coomologia di torsione non algebriche in $H^6(X, \mathbb{Z})$, dove X è una varietà di dimensione 5.

5. *Codimensione 1: il teorema di Lefschetz.*

Per formulare il suo problema Hodge si ispirò a un famoso risultato di Solomon Lefschetz [1924].

Teorema 5.1. *Ogni elemento di tipo* (1,1) *in* $H^2(X, \mathbb{Z})$ *rappresenta la classe di un divisore di* X.

Ci sono due metodi molto diversi per dimostrare tale risultato. Nella sua dimostrazione, Lefschetz usò il concetto di «funzione normale», introdotto in precedenza da Poincaré. Spieghiamo brevemente il metodo di Leschfetz nel caso in cui X sia una superfice. A tal fine, ricordiamo che per ogni curva liscia C è possibile definire un'applicazione dal gruppo dei divisori di grado 0 (i cui elementi sono somme formali finite $\sum m_i p_i$, con $p_i \in C$ e $\sum m_i = 0$) a valori in una varietà abeliana $J(C)$ (jacobiana di C). Un classico risultato (teorema di inversione di Jacobi) afferma che tale applicazione, chiamata mappa «di Abel-Jacobi», è surgettiva e il suo nucleo è il gruppo dei divisori linearmente equivalenti a 0 (cfr. § 8.3).

Supponiamo ora che la nostra superfice X sia immersa nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^N$, e fissiamo un fascio (*pencil*) generico di iperpiani in $\mathbb{P}^N$, che tagli X in un fascio di curve $(C_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$. Una curva Γ contenuta in X intersecherà ciascuna curva C_t lungo un divisore $\sum_{i=1}^{d} p_i(t)$. Sia p_0 un punto base del fascio (cioè p_0 è un punto che appartiene a C_t per ogni t). Allora $\sum p_i(t) - dp_0$ è un divisore di grado zero e quindi, per ogni t, definisce una classe $\nu_\Gamma(t)$ nella jacobiana $J(C_t)$ (fanno eccezione un numero finito di t per i quali C_t è singolare). La funzione che a t associa la classe $\nu_\Gamma(t)$ in $J(C_t)$ è chiamata «funzione normale». A ciascuna di tali funzioni Lefschetz associa una classe $\eta(\nu)$ in $H^2(X, \mathbb{Z})$, che coincide con $[\Gamma]$ nel caso in cui $\nu = \nu_\Gamma$, e dimostra che ogni classe in $H^2(X, \mathbb{Z})$ proviene da una funzione normale.

Si giunge alla dimostrazione del teorema 5.1 utilizzando un risultato dovuto a Poincaré [1910], il quale afferma che ogni funzione normale è della forma ν_Γ, per qualche curva Γ in X (questo risultato è in sostanza la versione parametrica del teorema di inversione di Jacobi).

Il metodo di dimostrazione moderno usa tecniche di coomologia dei fasci, uno degli strumenti indispensabili della geometria algebrica moderna. Essendo questo metodo troppo complicato per poter essere discusso in questa sede, ci limiteremo a osservare che, poiché l'applicazione esponenziale, definita dallo spazio delle funzioni olomorfe a quello delle funzioni olomorfe e invertibili, è localmente surgettiva, è possibile definire la seguente successione esatta:

$$Z^1(X) \xrightarrow{c} H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{j^{0,2}} H^{0,2}.$$

La prima applicazione è definita nel § 3; la seconda è ottenuta componendo la mappa $j : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{C})$ con la proiezione $H^2(X, \mathbb{C}) \to H^{0,2}$. Da questo segue che una classe di tipo (1, 1) in $H^2(X, \mathbb{Z})$ rappresenta la classe di un divisore.

Menzioniamo ora una conseguenza ovvia, per quanto utile, del teorema appena discusso. Si ricordi che con $\mathrm{Hdg}^p(X)$ denotiamo lo spazio delle classi di Hodge, cioè $H^{p,p} \cap H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ e che $\mathrm{Hdg}^*(X) = \bigoplus_p \mathrm{Hdg}^p(X)$ è una $\mathbb{Q}$-sottoalgebra di $H^*(X, \mathbb{Q})$.

Corollario 5.2. *Se* Hdg*(X) *è generata da* Hdg$^1(X)$*, la congettura di Hodge è vera per* X.

Dimostrazione. Abbiamo visto che, per definizione,

$$H^*(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} = \bigoplus_p H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}}$$

è una sottoalgebra di Hdg*(X) (proposizione 3.3). Queste due sottoalgebre coincidono in grado 1 per il teorema 5.1, e quindi, data l'ipotesi, coincidono in ogni grado.

Dal seguente lemma dedurremo altre conseguenze interessanti.

Lemma 5.3. *Se la congettura di Hodge è vera per le classi di tipo* (p, p), *con* $p < \frac{n}{2}$, *allora è vera per le classi di tipo* $(n-p, n-p)$.

Dimostrazione. Sia $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe di una sezione iperpiana e sia L l'endomorfismo dello spazio $H^*(X, \mathbb{Q})$ definito dall'applicazione $\xi \mapsto h\xi$.
Un altro risultato di Lefschetz[6] afferma che la mappa

$$L^{n-2p} : H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \to H^{2n-2p}(X,\mathbb{Q})$$

è un isomorfismo, che, grazie a 2.2.*b*), induce un isomorfismo di $H^{a,b}$ con $H^{n-a,n-b}$, per ogni coppia (a, b) con $a + b = 2p$. In particolare segue che lo spazio $H^{p,p}$ è isomorfo allo spazio $H^{n-p,n-p}$. Quindi se una classe $\eta \in H^{2n-2p}(X, \mathbb{Q})$ è di tipo $(n-p, n-p)$, questa può essere scritta come $L^{n-2p}(\xi)$ per qualche ξ di tipo (p, p). Poiché ξ è algebrica per ipotesi, $\eta = h^{n-2p}\xi$ è anche algebrica.

Corollario 5.4. *La congettura di Hodge è vera per* $H^{2n-2}(X, \mathbb{Q})$.

Dal precedente corollario e da 5.1 segue che la congettura di Hodge è vera per le varietà tridimensionali, e che il primo caso non noto è rappresentato dalle classi di tipo (2, 2) delle varietà di dimensione 4.

(5.5) *È possibile attaccare la congettura di Hodge utilizzando la teoria delle funzioni normali?* Possiamo estendere la dimostrazione di Lefschetz al caso delle classi di codimensione maggiore? Tale possibilità è stata presa seriamente in considerazione da Phillip Griffiths e dalla sua scuola. Limitiamoci per semplicità al caso cruciale dei cicli di codimensione 2 in una varietà di dimensione 4. Come nel caso della dimostrazione del teorema 5.1, immergiamo X in qualche spazio proiettivo di dimensione elevata e fissiamo un fascio

[6] Grothendieck battezzò questo risultato «théorème de Lefschetz vache», ossia teorema di Lefschetz difficile.

$(H_t)_{t \in \mathbf{P}^1}$ di sezioni iperpiane. Una superficie $S \subset X$ intersecherà H_t lungo una curva $\gamma(t)$. Sottraendo una curva fissata, possiamo assumere che la classe di coomologia del ciclo $\gamma(t)$ sia zero. Esattamente come nel caso delle curve, tali cicli definiscono un elemento $\nu_S(t)$ appartenente a un toro complesso $J^2(H_t)$, chiamato «varietà jacobiana intermedia» (cfr. § 8.3). In tal modo, possiamo associare alla superficie S una funzione normale $t \mapsto \nu_S(t) \in J^2(H_t)$. Anche in questo caso, ogni funzione normale dà luogo a una classe di tipo $(2, 2)$ in $H^4(X, \mathbb{Q})$, e, viceversa, ogni classe di questo tipo proviene da una funzione normale[7]. Ciò che manca in questo caso è l'analogo del teorema di inversione di Jacobi (e quindi la sua estensione, il teorema di Poincaré sulle funzioni normali): per la maggior parte dei fasci di iperpiani (H_t), l'immagine dell'applicazione corrispondente $Z^2(H_t)_{\mathrm{hom}} \to J^2(H_t)$ è numerabile per t generico. Solo in casi molto speciali si può trovare un fascio H_t per il quale tale applicazione è surgettiva, e quindi giungere alla dimostrazione della congettura di Hodge. Per esempio, questo è il caso delle ipersuperfici nello spazio proiettivo di dimensione 5 descritte da un'equazione di terzo grado (nella proposizione 6.1 sarà data una dimostrazione piú semplice). Malgrado i molti sforzi, rimane aperto il problema di trovare un sostituto del teorema di Poincaré.

6. *Casi noti e casi non noti.*

Come abbiamo visto, il caso cruciale per la congettura di Hodge è quello delle classi di tipo $(2, 2)$ in una varietà di dimensione 4. Le varietà quadridimensionali piú semplici sono quelle unirigate, cioè quelle che sono ricoperte da curve razionali. Per tali varietà si ha il seguente risultato [Conte e Murre 1978].

Proposizione 6.1. *Ogni varietà quadridimensionale unirigata soddisfa la congettura di Hodge.*

Dimostrazione (cenno). L'ipotesi nell'enunciato della proposizione significa che esiste un'applicazione razionale, genericamente surgettiva, $Z \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$, dove Z è una qualche varietà di dimensione 3. Il teorema di Hironaka sulla risoluzione delle singolarità ci dice che, dopo aver scoppiato certe sottovarietà di dimensione ≤ 2 di $Z \times \mathbb{P}^1$, si ottiene una varietà Y tale che la composizione $\pi : Y \to X$ sia definita dovunque.

Usando l'isomorfismo di Künneth 1.1.*d*) si verifica che la varietà $Z \times \mathbb{P}^1$ soddisfa la congettura di Hodge. Dalla descrizione esplicita della coomo-

[7] È necessario tenere conto della costante usata per ottenere $[\gamma(t)] = 0$; questo è, tuttavia, un dettaglio inessenziale.

logia della varietà scoppiata, si deduce che anche la varietà Y soddisfa tale congettura. Per finire, si osserva che se $\pi : Y \to X$ è un'applicazione surgettiva definita tra varietà proiettive della stessa dimensione e se Y soddisfa la congettura di Hodge, allora anche la varietà X soddisferà la stessa congettura: se $\xi \in H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ è di tipo (p, p), allora $\pi^* \xi \in H^{2p}(Y, \mathbb{Q})$ è anche di tipo (p, p) ed è perciò algebrica. D'altra parte $\pi_* \pi^* \xi = \deg(\pi)\xi$ e quindi la stessa classe ξ è algebrica.

(6.2) *Varietà abeliane.* La ben affermata «teoria della classificazione» delle varietà algebriche divide le varietà proiettive di dimensione n in $n + 2$ famiglie, in ordine di crescente complessità e generalità[8]. Le varietà unirigate costituiscono la classe piú speciale. Procedendo oltre nella classificazione, si trova la classe delle «varietà abeliane» (introdotte nel § 3.5). Il caso delle varietà abeliane è stato studiato a lungo, in particolare in dimensione 4. Riportiamo qui di seguito i principali risultati ottenuti, e rimandiamo il lettore a Van Geemen [1994] per ulteriori informazioni, e a Gordon [1999] per un resoconto esaustivo.

Per la maggior parte delle varietà abeliane la congettura di Hodge è vera per ragioni banali: l'algebra delle classi di Hodge è generata in grado 1 (cfr. corollario 5.2). In particolare tale condizione è verificata nei casi seguenti:

- per varietà abeliane generiche [Mattuck 1958];
- per il prodotto di curve ellittiche [Tate 1965];
- per varietà abeliane semplici[9] di dimensione p, dove p è un numero primo [Tankeev 1982].

David Mumford, per primo, costruí un esempio di varietà abeliana (di dimensione 4) con la proprietà che l'$\mathrm{Hdg}^2(A)$ non è generato, come algebra, da classi di divisori. Questo esempio fu reinterpretato da André Weil [1980], il quale osservò che sull'anello di Hodge di tale varietà abeliana è definita una moltiplicazione complessa per un campo quadratico immaginario, e che tale moltiplicazione ne costituisce la caratteristica peculiare.

Si consideri una varietà abeliana $A = V/\Gamma$, dove V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione g e Γ un reticolo contenuto in V. Diciamo che A è una varieta abeliana di tipo Weil, se su V è definito un endomorfismo u che preserva Γ, tale che $\mathrm{Tr}\, u = 0$ e $u^2 = -d\, \mathrm{Id}_V$, per qualche intero $d > 0$ (si noti che tale condizione forza g a essere pari). Tale endomorfismo definisce su $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma \otimes \mathbb{Q}$ una struttura di $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$- spazio vettoriale di dimensione g.

[8] Si veda il saggio di F. Catanese, *La classificazione delle varietà algebriche*, in questo stesso volume, pp. 643-704. [*N.d.C.*].

[9] Un toro complesso T è semplice se gli unici sottotori complessi che contiene sono (0) e T.

Pensiamo a $H^g(A, \mathbb{Q})$ come allo spazio delle g-forme lineari totalmente antisimmetriche su $\Gamma_{\mathbb{Q}}$; tale spazio contiene lo spazio delle forme φ che sono $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$- invarianti, cioè che soddisfano:

$$\varphi(\lambda\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g) = \varphi(\gamma_1, \lambda\gamma_2, \ldots, \gamma_g) = \cdots = \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \lambda\gamma_g),$$

dove $\gamma_1, \ldots, \gamma_g \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$. Questo sottospazio è isomorfo, in modo canonico, a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda^g_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}\Gamma_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}\right)$ e quindi ha dimensione 2 come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$. È un esercizio di algebra lineare mostrare che tale spazio è contenuto in $H^{g/2, g/2}(A)$, e quindi in $\mathrm{Hdg}^{g/2}(A)$. Weil dimostra che, nel caso in cui A sia abbastanza generale, il gruppo $H^2(A, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ è ciclico, e che quindi $\mathrm{Hdg}(A)$ *non* è generato da classi di divisori. Di fatto, in dimensione bassa, questo è l'unico caso in cui si presenta tale eventualità.

Proposizione 6.3 [Moonen e Zarhin 1999]. *Sia A una varietà abeliana di dimensione* ≤ 5. *Allora,* Hdg(A) *o è generato dalle classi dei divisori o A è di tipo Weil.*

In tal modo, le varietà abeliane di dimensione 4 di tipo Weil appaiono come una classe molto naturale per studiare la congettura di Hodge. Sfortunatamente, malgrado la loro descrizione sia piuttosto concreta, sono noti solo i casi con $d = 1$ e $d = 3$ (con qualche ipotesi addizionale sulla polarizzazione), grazie alla presenza di unità non banali nell'anello degli interi del campo $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$ [Schoen 1988]. Negli altri casi non è noto come individuare un numero sufficiente di superfici algebriche in queste varietà abeliane di dimensione 4.

(6.4) *Prodotti di superfici.* Siano T e S due superfici complesse (lisce e proiettive) e sia $\varphi : H^2(S, \mathbb{Q}) \to H^2(T, \mathbb{Q})$ un'applicazione $\mathbb{Q}$-lineare. Identificando $H^2(S, \mathbb{Q})$ con il suo duale mediante la dualità di Poincaré (1.1.*c*), possiamo associare a φ un elemento di $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes H^2(T, \mathbb{Q})$ e quindi, mediante l'applicazione di pull back, un elemento $\Gamma_\varphi \in H^4(S \times T, \mathbb{Q})$. È semplice verificare che φ è un morfismo di strutture di Hodge se e solo se Γ_φ è di tipo (2, 2). In tal modo, in questo caso, la congettura di Hodge è equivalente al fatto che ogni morfismo di strutture di Hodge $\varphi : H^2(S, \mathbb{Q}) \to H^2(T, \mathbb{Q})$ proviene da una corrispondenza algebrica tra S e T; un enunciato che comunque non sappiamo né come dimostrare né come confutare.

Per quanto riguarda i risultati positivi, menzioniamo un bel teorema recentemente ottenuto da Shigeru Mukai [2002], che dimostra che Γ_φ è algebrico nel caso in cui S e T siano superfici K3[10] e φ sia un'*isometria*. Quando φ proviene da un'isometria $H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(T, \mathbb{Z})$, tale enunciato è il teorema di Torelli per le superfici K3, ma il corrispondente enunciato sul campo dei razionali $\mathbb{Q}$ è piú sottile, e richiede lo studio accurato di certi spazi di moduli di fibrati vettoriali (e di fibrati proiettivi) definiti sulle superfici.

Sono noti esempi di superfici lisce, proiettive e semplicemente connesse per le quali la cosiddetta «mappa dei periodi» ha grado > 1; questo significa che data una superficie generica S di questo tipo, esiste un'altra superficie T, non isomorfa a S, e un isomorfismo di strutture di Hodge $H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(T, \mathbb{Z})$; l'esempio piú semplice è probabilmente fornito dalle superfici studiate da Fabrizio Catanese [1980], che sono intersezioni complete di 6 ipersuperfici di grado due nello spazio proiettivo pesato $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3)$. In tal caso, non è per nulla chiaro, neppure intuitivamente, se esista una corrispondenza algebrica tra le superfici S e T.

(6.5) *Ipersuperfici di Fermat.* Queste sono ipersuperfici in $\mathbb{P}^{n+1}$ descritte da un'equazione del tipo

$$X_0^d + \cdots + X_{n+1}^d = 0.$$

Grazie all'esistenza di un grande gruppo di simmetrie, tali ipersuperfici hanno una struttura molto speciale, che consente di dimostrare la congettura di Hodge (per le classi di grado $\frac{n}{2}$ con n pari, che costituiscono il solo caso non banale), quando d è primo [Ran 1980-81] e, piú in generale, sotto certe condizioni aritmetiche sul grado [Shioda 1981-82]. Ovviamente questo è un approccio abbastanza particolare, che può funzionare nel caso di varietà molto speciali.

7. *La congettura di Hodge generale.*

Discuteremo ora il problema proposto originariamente da Hodge, chiamato «congettura di Hodge generale» [Grothendieck 1969*b*]. Continuiamo a considerare il caso della coomologia a coefficienti razionali, poiché gli esempi del § 4 non lasciano alcuna speranza di poter enunciare, in modo ragionevole, la congettura per la coomologia a coefficienti interi. Come sempre, X denoterà una varietà proiettiva di dimensione n. Diremo che una classe $\alpha \in H^r(X, \mathbb{Q})$ ha livello[11] $\geq c$, se esiste una varietà proiettiva Z di

[10] Queste sono superfici semplicemente connesse dotate di una 2-forma olomorfa dovunque diversa da zero. Per esempio, le quartiche in $\mathbb{P}^3$ sono superfici K3.

[11] Hodge dice *rank*, Grothendieck *niveau* (= livello). Il termine *coniveau* appare frequentemente in letteratura.

dimensione $n - c$ e un'applicazione $u : Z \to X$, tale che α appartiene all'immagine di $u_* : H^{r-2c}(Z, \mathbf{Q}) \to H^r(X, \mathbf{Q})$. Le classi di livello $\geq c$ formano un sottospazio, $N^cH^r(X, \mathbf{Q})$, dello spazio $H^r(X, \mathbf{Q})$. Abbiamo che

$$H^r(X,\mathbf{Q}) = N^0H^r(X,\mathbf{Q}) \supset N^1H^r(X,\mathbf{Q}) \supset \cdots$$

e $N^cH^r(X,\mathbf{Q}) = (0)$ per $c > \frac{r}{2}$.

Nella situazione di cui sopra, per 2.2.*b*), si ha che

$$u_*(H^{p,q}(Z)) \subset H^{p+c,q+c}(X);$$

perciò:

$$N^cH^r(X,\mathbf{Q}) \subset H^r(X,\mathbf{Q}) \cap (H^{r-c,c} \oplus \cdots \oplus H^{c,r-c}),$$

e $N^cH^r(X, \mathbf{Q})$ è una *sottostruttura di Hodge* di $H^r(X, \mathbf{Q})$ (§2). Nella formulazione originaria di Hodge, il problema è stabilire *se tale inclusione è in realtà un'uguaglianza.*

Grothendieck [1969*a*] osservò che ciò non può essere vero, poiché il membro di destra dell'inclusione, V, non è, necessariamente, una sottostruttura di Hodge di $H^r(X, \mathbf{Q})$. Infatti, quando ciò si verifica, si ha che

$$V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = H^{r-c,c} \oplus \cdots \oplus H^{c,r-c}.$$

In particolare, se r è dispari, la dimensione di V deve essere pari, a causa della simmetria di Hodge, $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$ (2.3). Grothendieck esibisce quindi il seguente esempio: sia E una curva ellittica ottenuta quozientando $\mathbf{C}$ con il reticolo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, dove $\tau \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. Si consideri $X = E^3$, $r = 3$ e $c = 1$. Un semplice calcolo mostra che $\dim(V)$ è congruente modulo 2 al rango del $\mathbf{Q}$-sottospazio di $\mathbf{C}$, generato da $1, \tau, \tau^2, \tau^3$. Quando τ è un numero algebrico (non reale) di grado 3, tale dimensione è dispari.

Tutto ciò portò Grothendieck a enunciare la seguente congettura[12].

(7.1) **Congettura di Hodge generale.** *$N^cH^r(X, \mathbf{Q})$ è la piú grande sottostruttura di Hodge di $H^r(X, \mathbf{Q})$ che è contenuta in $H^{r-c,c} \oplus \cdots \oplus H^{c,r-c}$.*

Il caso $r = 2c$ rappresenta la congettura di Hodge classica. Grothendieck [1969*a*] mostra che anche il caso successivo, $r = 2c + 1$, segue dalla congettura di Hodge classica, ma che ciò non è vero per $r > 2c + 1$.

Il libro di James Lewis [1999] contiene, tra le molte altre cose, un'esaustiva trattazione della congettura di Hodge generale. In particolare, vi si può

[12] Della quale egli stesso diceva «può sembrare un po' troppo macchinosa per ispirare fiducia».

trovare una lista di casi per i quali tale congettura è nota, analoga a quella discussa nel § 6.

8. *Teoria di Hodge e cicli algebrici.*

La congettura di Hodge ha conseguenze interessanti in geometria algebrica? Bene, tale congettura implicherebbe tutto ciò che si vorrebbe sapere sulle classi di coomologia algebriche (ma che si ha paura di chiedere). Piú precisamente, esiste una serie di congetture proposte da Grothendieck, note con il nome di «congetture standard»[11]. Tutte queste congetture sono conseguenza della congettura di Hodge, ma Grothendieck, nel formularle, aveva in mente varietà algebriche definite su un campo arbitrario, per le quali tale congettura non ha senso. Le congetture standard hanno come conseguenza le congetture di Weil sul numero di punti delle varietà definite su un campo finito (successivamente dimostrate da Deligne) e consentirebbero di definire la categoria abeliana dei motivi, uno dei sogni di Grothendieck. Sebbene quest'ultimo affermasse: «Unitamente al problema della risoluzione delle singolarità, la dimostrazione delle congetture standard mi pare il compito piú urgente che deve affrontare la geometria algebrica» [Grothendieck 1969*b*], negli ultimi quarant'anni sono stati compiuti pochi progressi in questa direzione.

In quanto segue, vorrei fare un accenno alle congetture standard, restringendomi, per semplicità, al caso del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Siano X una varietà proiettiva, $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe di una sezione iperpiana e L l'endomorfismo di $H^*(X, \mathbb{Q})$ definito dall'applicazione $\xi \mapsto h\xi$. Il «teorema di Lefschetz difficile» afferma che l'omomorfismo iterato

$$L^{n-r} : H^r(X,\mathbb{Q}) \to H^{2n-r}(X,\mathbb{Q})$$

è un isomorfismo per ogni $r \leq n$. La congettura «di tipo Lefschetz» è l'enunciato seguente.

Congettura 8.1. *L'omomorfismo indotto*

$$L^{n-2p} : H^{2p}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q}) \to H^{2n-2p}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q})$$

(per $2p \leq n$) è un isomorfismo.

Vediamo perché tale affermazione segue dalla congettura di Hodge. Nella dimostrazione della proposizione 5.3 abbiamo visto che la complessificazione

$$L^{n-2p}_{\mathbb{C}} : H^{2p}(X,\mathbb{C}) \to H^{2n-2p}(X,\mathbb{C})$$

[11] Si veda Grothendieck [1969*b*] e Kleiman [1968] per un resoconto piú dettagliato.

definisce un isomorfismo tra $H^{p,p}$ e $H^{n-p,n-p}$, e quindi un isomorfismo tra Hdg^p e Hdg^{n-p}. Data la congettura di Hodge, tale isomorfismo è precisamente quello descritto nell'enunciato della congettura 8.1.

Grothendieck [1969*b*] fornisce un certo numero di enunciati che sono equivalenti a 8.1. Tra questi, particolarmente interessante è il seguente[14]. Si consideri la mappa della classe ciclo $c : \mathcal{Z}^p(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ (§ 3). Diciamo che un ciclo $Z \in \mathcal{Z}^p(X) \otimes \mathbb{Q}$ è «numericamente banale», se $\int_X [Z] \cdot [T] = 0$, per ogni ciclo algebrico $T \in \mathcal{Z}^{n-p}(X)$. Chiaramente, ogni ciclo omologicamente banale è anche numericamente banale. Viceversa:

Congettura 8.2. *Un ciclo numericamente banale è omologicamente banale.*

In altre parole, un elemento di $H^{2p}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q})$, che ha intersezione zero con tutti gli elementi di $H^{2(n-p)}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q})$, è zero; o, equivalentemente, la forma di intersezione

$$H^{2p}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q}) \times H^{2(n-p)}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

è non degenere. Come accennato in precedenza, anche tale affermazione segue dalla congettura di Hodge. Infatti, poiché da quest'ultima segue la congettura 8.1, è sufficiente mostrare che la forma $(\alpha,\beta) \mapsto L^{n-2p}(\alpha \cdot \beta)$ è non degenere quando ristretta a $\mathrm{Hdg}^p(X)$. Se denotiamo con $\mathrm{Hdg}^p_{\mathrm{prim}}(X)$ il nucleo di L^{n-2p+1} in Hdg^p, abbiamo la seguente «decomposizione di Lefschetz»:

$$\mathrm{Hdg}^p(X) = \mathrm{Hdg}^p_{\mathrm{prim}}(X) \oplus L\,\mathrm{Hdg}^{p-1}_{\mathrm{prim}}(X) \oplus \cdots \oplus L^pH^0(X,\mathbb{C}),$$

tale che la forma di cui sopra è definita, con segnatura $(-1)^i$, su $L^{p-i}\mathrm{Hdg}^i_{\mathrm{prim}}(X)$ [cfr. Weil 1958]. Da questo segue la nostra asserzione.

La congettura 8.2 è di fondamentale importanza per costruire l'ancora misteriosa «categoria dei motivi», immaginata da Grothendieck. In prima approssimazione, l'idea è di associare a ogni varietà proiettiva non singolare X un oggetto di una certa categoria abeliana, il suo *motivo* $h(X)$, che contiene tutte le informazioni algebriche che riguardano X. Uwe Jannsen [1992] ha mostrato che questo può essere fatto se (e, in un certo senso, solo se) la congettura 8.2 è vera. In tal modo, la congettura di Hodge consentirebbe di costruire la categoria dei motivi nel caso in cui il campo di definizione sia

[14] Mi si lasci sottolineare che stiamo lavorando sul campo dei numeri complessi; l'equivalenza non è nota nel caso di un campo arbitrario.

C. Ad ogni modo ci sono molte piú evidenze che corroborano l'uguaglianza tra l'equivalenza omologica e quella numerica, di quante non ce ne siano a favore della congettura di Hodge! Per fare un esempio, la congettura 8.2 è verificata nel caso delle varietà abeliane [Lieberman 1968], mentre, come abbiamo visto, la congettura di Hodge è ancora un problema aperto anche nel caso di alcune semplici varietà abeliane di dimensione 4.

(8.3) *Quello che la congettura di Hodge non dice.* Malgrado queste meravigliose conseguenze, il lettore dovrebbe essere consapevole che la congettura di Hodge (anche la congettura di Hodge generale) fornisce solo un'informazione molto parziale a proposito della struttura dei cicli algebrici di X. Per esempio, descrive l'immagine dell'omomorfismo $\mathcal{Z}^p(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Q})$, ma cosa ci dice a proposito del suo nucleo? La risposta a tale domanda, che rimane tuttora un mistero, è uno dei problemi piú fondamentali della geometria algebrica – perfino piú fondamentale, a mio avviso, della congettura di Hodge stessa. Lasciatemi descrivere in breve ciò che è noto e ciò che ci aspettiamo.

Prima di tutto, il gruppo $\mathcal{Z}^p(X)$, che è un gruppo libero con base di cardinalità non numerabile, è ovviamente troppo grande. Su tale gruppo è definita, in modo naturale, una relazione di equivalenza, l'«equivalenza razionale»: in poche parole, due cicli sono detti razionalmente equivalenti, se entrambi appartengono a una famiglia di cicli parametrizzata da $\mathbf{P}^1$ (certamente occorrerebbe dare una definizione precisa di tale relazione). Il gruppo quoziente, $\mathrm{CH}^p(X)$, è chiamato il gruppo di Chow. La mappa della classe ciclo induce un omomorfismo $c : \mathrm{CH}^p(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. La congettura di Hodge descrive (dopo aver tensorizzato per $\mathbb{Q}$) l'immagine di tale omomorfismo; sia $\mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X)$ il suo nucleo. Anche su questo gruppo la teoria di Hodge fornisce qualche informazione. Osserviamo che per la coomologia in grado dispari, la decomposizione di Hodge può essere scritta nel modo seguente:

$$H^{2p-1}(X, \mathbb{C}) = W \oplus \overline{W}, \quad \text{con} \quad W = H^{0,2p-1} \oplus \cdots \oplus H^{p-1,p}.$$

È un facile esercizio dimostrare che l'immagine in W di $H^{2p-1}(X, \mathbb{Z})$ è un reticolo. La *jacobiana intermedia* $\mathrm{J}^p(X)$ è il toro complesso definito come il quoziente $W/\mathrm{Im}\, H^{2p-1}(X, \mathbb{Z})$ – nel caso $p = n = 1$, tale definizione si riduce a quella standard della jacobiana della curva X. Griffiths ha costruito un omomorfismo $\alpha^p : \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X) \to \mathrm{J}^p(X)$, che generalizza la mappa di Abel-Jacobi classica.

L'immagine di α^p è un'estensione di un sottotoro complesso di $\mathrm{J}^p(X)$, diciamo $\mathrm{J}^p(X)_a$, per un gruppo numerabile. Tale gruppo è un oggetto veramente misterioso, di cui, al momento, non è nota alcuna caratterizzazione: l'unica cosa che sappiamo è che può essere di rango infinito [Clemens 1983].

Per quanto riguarda $J^p(X)_a$, la congettura di Hodge predice che questo è il *piú grande sottotoro complesso, la cui algebra di Lie sia contenuta in* $H^{p-1,p}$. In particolare, la mappa $\alpha : \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X) \to J^p(X)$ dovrebbe essere surgettiva se (e solo se) $H^{a,b} = 0$, per $a + b = 2p - 1$ e $a \notin \{p, p-1\}$. Tale risultato è indimostrato già per le varietà di dimensione 3 con $H^{3,0} = 0$, che sono il primo caso non banale.

La mappa α^1 è un isomorfismo, ma ciò non è piú vero se $p \geq 2$: Mumford [1968] dimostrò che il nucleo di α^2 è molto grande[15] già nel caso in cui X è una superficie, se $H^{2,0}(X) \neq 0$. Possiamo dire ancora qualcosa di ragionevole a proposito di quel nucleo? Le magnifiche congetture di Bloch-Beilinson predicono l'esistenza di una filtrazione (funtoriale) di anelli $(F^j)_j \geq 0$ di $\mathrm{CH}(X)$[16], con:

$$\mathrm{CH}^p(X) = F^0\mathrm{CH}^p(X) \supset F^1\mathrm{CH}^p(X) \supset \cdots \supset F^{p+1}\mathrm{CH}^p(X) = 0,$$

$F^1\mathrm{CH}^p(X) = \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X)$ e $F^2\mathrm{CH}^p(X) = \mathrm{Ker}\,\alpha^p$; inoltre, Beilinson propone, sotto forma di congettura, una formula che esprime i quozienti F^j/F^{j+1} in termini del «motivo» di X (v. *supra*, p. 725).

9. *Conclusione.*

A questo punto spero sia chiaro che la parola «congettura», sebbene adottata universalmente, è inappropriata. Nel proporre il suo quesito Hodge fu attento a non usarla e, da allora, non sono state accumulate molte evidenze a favore di una sua soluzione positiva. Ad ogni modo trovare un controesempio potrebbe essere difficile quanto dimostrarne l'enunciato: infatti non è noto alcun metodo per dimostrare la non algebricità delle classi in Hdg^p. Quindi mi sembra che l'unica previsione ragionevole a proposito della congettura di Hodge sia che non siamo vicini a una sua soluzione, qualunque

[15] Nel senso che non può essere parametrizzato da una varietà algebrica.
[16] In realtà, si dovrebbe sostituire $\mathrm{CH}(X)$ con $\mathrm{CH}(X) \otimes \mathbf{Q}$.

essa sia.

AA.VV.

1992 *Trento Examples. Classification of Irregular Varieties (Trento, 1990)*, Springer-Verlag, Berlin.

ATIYAH, M. e HIRZEBRUCH, F.

1962 *Analytic cycles on complex manifolds*, in «Topology», 1, pp. 25-45.

CATANESE, F.

1980 *The moduli and the global period mapping of surfaces with* $K^2 = p_g = 1$*: a counterexample to the global Torelli problem*, in «Compositio Mathematica», 41(3), pp. 401-14.

CLEMENS, H.

1983 *Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated*, in «Publications Mathématiques de l'IHES», 58, pp. 19-38.

CONTE, A. e MURRE, J.-P.

1978 *The Hodge conjecture for fourfolds admitting covering by rational curves*, in «Mathematische Annalen», 238(1), pp. 79-88.

DELIGNE, P. e ILLUSIE, L.

1987 *Relèvements modulo* p^2 *et décomposition du complexe de de Rham*, in «Inventiones Mathematicae», 89(2), pp. 247-70.

GORDON, B.

1999 *The Hodge Conjecture for Abelian Varieties*, Appendice B in LEWIS [1999], pp. 297-356.

GRIFFITHS, PH. e HARRIS, J.

1985 *On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension-two cycles*, in «Mathematische Annalen», 271(1), pp. 31-51.

GROTHENDIECK, A.

1969*a* *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, in «Topology», 8, pp. 299-303.

1969*b* *Standard Conjectures on Algebraic Cycles*, in AA.VV., *Algebraic Geometry*, Oxford University Press, Oxford-London, pp. 193-99.

HODGE, W.

1941 *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge University Press, Cambridge.

1952 *The Topological Invariants of Algebraic Varieties*, in AA.VV., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge 1950*, American Mathematical Society, Providence, vol. I, pp. 182-92.

JANNSEN, U.

1992 *Motives, numerical equivalence, and semi-semplicity*, in «Inventiones Mathematicae», 107(3), pp. 447-52.

KLEIMAN, S.

1968 *Algebraic Cycles and the Weil Conjectures*, in AA.VV., *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, Amsterdam - Masson, Paris, pp. 359-86.

LEFSCHETZ, S.

1924 *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris.

LEWIS, J. D.

1999 *A Survey of the Hodge Conjecture*, American Mathematical Society, Providence.

LIEBERMAN, D.

1968 *Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds*, in «American Journal of Mathematics», 90, pp. 366-74.

MATTUCK, A.

1958 *Cycles on abelian varieties*, in «Proceedings of the American Mathematical Society», 9, pp. 88-98.

MOONEN, B. e ZARHIN, Y.

1999 *Hodge classes on abelian varieties of low dimension*, in «Mathematische Annalen», 315(4), pp. 711-33.

MUKAI, SHIGERU

2002 *Vector Bundles on a K3 Surface*, in AA.VV., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002*, Higher Education Press, Beijing.

MUMFORD, D.

1968 *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*, in «Journal of Mathematics of Kyoto University», 9, pp. 195-204.

POINCARÉ, H.

1910 *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, in «Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure», serie 3, 27, pp. 55-108.

RAN, Z.

1980-81 *Cycles on Fermat hypersurfaces*, in «Compositio Mathematica», 42(1), pp. 121-142.

SCHOEN, C.

1988 *Hodge classes on self-products of a variety with an automorphism*, in «Compositio Mathematica», 65(1), pp. 3-32.

SHIODA, T.

1981-82 *Algebraic cycles on abelian varieties of Fermat type*, in «Mathematische Annalen», 258(1), pp. 65-80.

SOULÉ, C. e VOISIN, C.

2005 *Torsion cohomology classes and algebraic cycles on complex projective manifolds*, in «Advances in Mathematics», 198(1), pp. 107-27.

TANKEEV, S.

1982 *Cycles on simple abelian varieties of prime dimension*, in «Izvestija Akademii Nauk SSSR», serie «Matematika», 46(1), pp. 155-70.

TATE, J.

1965 *Algebraic Cycles and Poles of Zeta Functions*, in AA.VV., *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper & Row, New York, pp. 93-110.

TOTARO, B.

1997 *Complex algebraic cycles and complex cobordism*, in «Journal of the American Mathematical Society», 10(2), pp. 467-93.

VAN GEEMEN, B.

1994 *An Introduction to the Hodge Conjecture for Abelian Varieties*, in AA.VV., *Algebraic Cycles and Hodge Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

VOISIN, C.

2002 *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Société Mathématique de France, Paris.

2006 *On integral Hodge classes on uniruled or Calabi-Yau threefolds*, in AA.VV., *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry (Kyoto 2004)*, «Advanced Studies in Pure Mathematics», 45, pp. 43-73.

WEIL, A.

1958 *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris.

1980 *Abelian Varieties and the Hodge Ring*, in ID., *Collected Papers*, vol. III, Springer-Verlag, Berlin, pp. 421-29.